Plaquette 4 – Intégration par parties et applications

Calcul intégral — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

L'intégration par parties sert quand la fonction est un **produit** dont aucune forme composée ne donne de primitive (polynôme fois exponentielle, fois sinus, fois logarithme). On choisit u = le facteur qui **se simplifie en dérivant** (un polynôme, ou $\ln x$) et v' = celui dont on connaît une **primitive**. Si l'intégrale obtenue n'est pas plus simple, on a mal choisi.

Exercice 1 – Polynôme fois exponentielle

Calculer $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2 – Polynôme fois sinus

Calculer $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 – Polynôme fois cosinus

Calculer $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 – Polynôme fois logarithme

Calculer $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5 – Logarithme sur x carré

Calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 – Fonction affine fois exponentielle décroissante

Calculer $\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 – Une primitive du logarithme

Pour $x > 0$, on pose $L(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$.

a) En écrivant $\ln t = 1 \times \ln t$, calculer $L(x)$ par intégration par parties.

b) En déduire une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 8 – Le carré du logarithme

Calculer $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$, sachant que $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Une intégrale qui revient

Soit $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$.

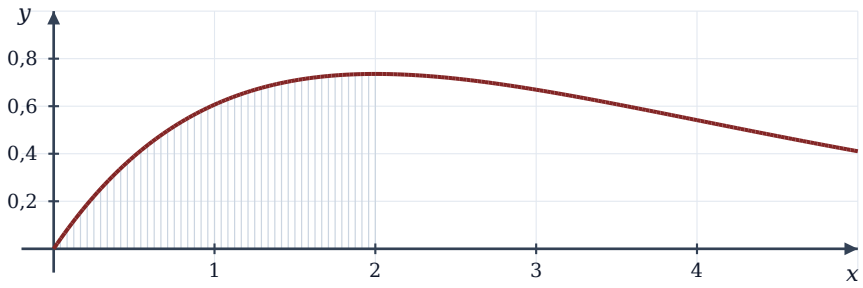
a) Par une intégration par parties, montrer que $I = -J$.

b) Par une autre, montrer que $J = -e^{\pi} - 1 + I$.

c) En déduire I.

Exercice 10 – Une aire par parties

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $f(x) = x\,e^{-x/2}$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.



Domaine sous la courbe de f entre 0 et 2

Exercice 11 – Une relation de récurrence

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_1^{e} (\ln x)^n \, dx$.

a) Calculer I_0.

b) Par une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$.

c) En déduire I_1, I_2 et I_3.

Exercice 12 – Valeur moyenne du logarithme

Calculer la valeur moyenne de la fonction ln sur $[1\,;e]$, sachant qu'une primitive de ln est $x \ln x - x$.

Exercice 13 – Distance parcourue

La vitesse d'un mobile (en m/s) vaut $v(t) = t\,e^{-t}$. Calculer la distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 3$ s.

Exercice 14 – Bien choisir u et v'

On veut calculer $K = \int_1^{e} x^2 \ln x \, dx$.

a) Expliquer pourquoi le choix $u = x^2$, $v' = \ln x$ est mauvais.

b) Calculer K avec le bon choix.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Quand l’intégration par parties est inutile

Un élève veut calculer $\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$ et $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\cos\left(x^2\right)dx$ par intégration par parties.

a) Montrer qu’une forme composée donne directement une primitive, et calculer les deux intégrales.

b) Pourquoi l’intégration par parties avec $u = x$ échouerait-elle ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).