

Plaquette 2 - Propriétés : linéarité, Chasles, moyenne

Calcul intégral — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Les propriétés de l'intégrale permettent de calculer **sans primitive** ou de **découper** un calcul : la linéarité sépare les termes, la relation de Chasles découpe l'intervalle (utile pour les fonctions définies par morceaux ou les valeurs absolues), la croissance de l'intégrale donne des **encadrements**, et la valeur moyenne résume une fonction par un seul nombre.

Exercice 1 - Utiliser la linéarité

On sait que $\int_0^2 f(x) dx = 3$ et $\int_0^2 g(x) dx = -1$. Calculer :

- a) $\int_0^2 (2f(x) - 3g(x)) dx$
- b) $\int_0^2 (f(x) + 4) dx$
- c) $\int_0^2 (f(x) + x) dx$

Exercice 2 - Utiliser la relation de Chasles

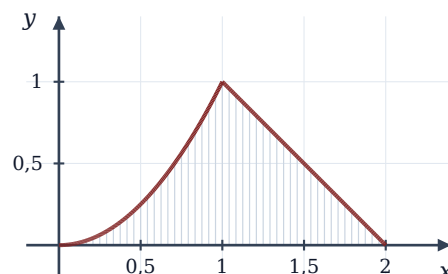
On sait que $\int_0^5 f(x) dx = 7$ et $\int_2^5 f(x) dx = 4$. Calculer :

- a) $\int_0^2 f(x) dx$
- b) $\int_5^0 f(x) dx$
- c) $\int_2^2 f(x) dx$

Exercice 3 - Une fonction définie par morceaux

Soit f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = x^2$ si $x \in [0; 1]$ et $f(x) = 2 - x$ si $x \in [1; 2]$.

- a) Vérifier que f est continue en 1.
- b) Calculer $\int_0^2 f(x) dx$.



Courbe de f et domaine sous la courbe

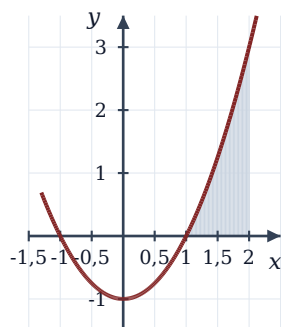
Exercice 4 - Valeur absolue et Chasles

Calculer $\int_0^3 |x - 1| dx$.

Exercice 5 - Une intégrale nulle

a) Calculer $\int_{-1}^2 (x^2 - 1) dx$.

b) La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est-elle nulle sur $[-1 ; 2]$? Expliquer le résultat du a) à l'aide d'aires.



Courbe de $x \mapsto x^2 - 1$ sur $[-1 ; 2]$

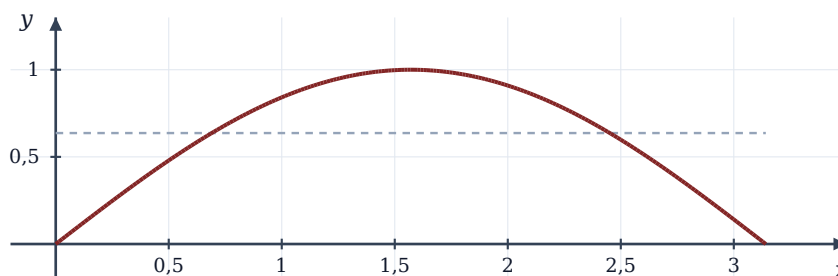
Exercice 6 - Comparer sans calculer

Soit $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$ (on ne sait pas trouver de primitive).

- a) Comparer x^2 et x sur $[0 ; 1]$, puis e^{x^2} et e^x .
 b) En déduire que $1 \leq I \leq e - 1$.

Exercice 7 - Valeur moyenne du sinus

- a) Calculer la valeur moyenne μ de la fonction sinus sur $[0 ; \pi]$.
 b) Interpréter graphiquement.



Arche de sinus sur $[0 ; \pi]$ et hauteur moyenne (pointillé)

Exercice 8 - Température moyenne

La température (en °C) entre 6 h et 18 h est modélisée par

$$T(t) = 15 + 5 \sin\left(\frac{\pi(t-6)}{12}\right), \quad t \in [6 ; 18].$$

Calculer la température moyenne sur cette période.

Exercice 9 - L'inégalité de la moyenne

Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

- a) Encadrer $\frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in [0; 1]$.
- b) En déduire un encadrement de I .

Exercice 10 - Parité et intégrale

Calculer, en utilisant des arguments de parité :

- a) $\int_{-1}^1 x \cos x \, dx$
- b) $\int_{-1}^1 (x^3 + x^2) \, dx$

Exercice 11 - Une valeur absolue trigonométrique

- a) Calculer $\int_0^\pi \cos x \, dx$.
- b) Calculer $\int_0^\pi |\cos x| \, dx$ et interpréter la différence.

Exercice 12 - Une suite d'intégrales

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$.

- a) Montrer que (I_n) est décroissante.
- b) Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (I_n) .

Exercice 13 - Vitesse moyenne

Un mobile a pour vitesse $v(t) = 2t + 1$ (en m/s) sur $[0; 4]$.

- a) Calculer la distance parcourue.
- b) Calculer la vitesse moyenne et vérifier qu'elle est atteinte à un instant de $[0; 4]$.

Exercice 14 - Retrouver une intégrale inconnue

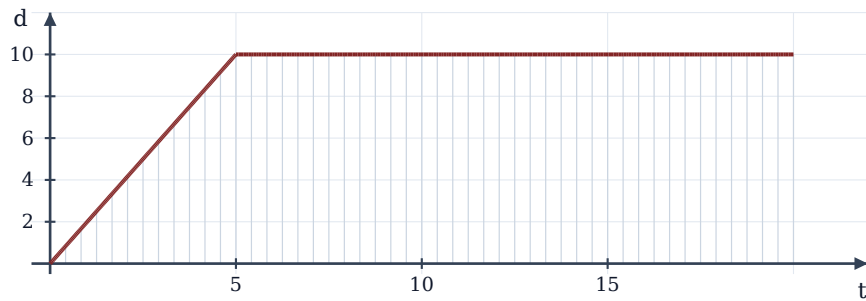
Une fonction f continue sur $[0; 1]$ vérifie $\int_0^1 (f(x) + 2x) \, dx = 5$ et $\int_0^1 (3f(x) - g(x)) \, dx = 10$.

Calculer $\int_0^1 f(x) \, dx$, puis $\int_0^1 g(x) \, dx$.

Exercice 15 – Remplissage à débit variable

Un bassin se remplit avec un débit $d(t)$ (en L/min) égal à $2t$ pendant les 5 premières minutes, puis constant à 10 L/min jusqu'à $t = 20$ min.

- Calculer le volume d'eau versé en 20 min.
- Quel est le débit moyen ?



Débit en fonction du temps ; l'aire est le volume versé