

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : aires, valeur moyenne et intégration par parties

Calcul intégral — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On calcule une intégrale par **primitive**, par **intégration par parties** ou en reconnaissant une **forme composée** ; on interprète le résultat comme une **aire** ou une **valeur moyenne**, et on encadre quand le calcul exact est impossible.

Exercice 1 - Intégrales de polynômes

Calculer :

a) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$

b) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$

Exercice 2 - Intégrale avec exponentielle

Calculer $\int_0^1 (2e^x - e^{-x}) dx$.

Exercice 3 - Forme composée

Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ et $\int_0^1 xe^{x^2} dx$.

Exercice 4 - Intégration par parties

Calculer $\int_0^1 xe^{2x} dx$.

Exercice 5 - IPP avec logarithme

Calculer $\int_1^2 \ln x dx$.

Exercice 6 - Double IPP

Calculer $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

Exercice 7 - Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0; 3]$, et déterminer où elle est atteinte.

Exercice 8 - Aire entre deux courbes

Calculer l'aire du domaine délimité par $y = x$ et $y = x^2$ entre leurs points d'intersection.

Exercice 9 - Intégrale et parité

Calculer sans primitive $\int_{-2}^2 (x^3 - 5x) dx$, puis $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$.

Exercice 10 - Encadrement d'une intégrale

Encadrer $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, puis comparer à la valeur numérique.

Exercice 11 - Fonction définie par une intégrale

Soit $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

- a) Justifier que F est dérivable et donner F' .
- b) Étudier la parité et la monotonie de F .

Exercice 12 - Aire et modèle concret

Le débit d'une rivière vaut $d(t) = 20 + 10 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ (m³/s, t en heures). Calculer le volume écoulé entre $t = 0$ et $t = 12$ h.

Exercice 13 - Suite d'intégrales

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- a) Calculer I_0 .
- b) Montrer que (I_n) est décroissante et positive, puis donner sa limite.

Exercice 14 - Intégrale et signe

Calculer $\int_0^3 (x^2 - 2x) dx$, puis l'**aire** entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[0; 3]$.

Exercice 15 - Synthèse : aire et valeur moyenne

Soit $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0; 2]$.

- a) Calculer $\int_0^2 f$ par intégration par parties.
- b) En déduire l'aire sous la courbe et la valeur moyenne.