

Plaquette 4 - Formule du binôme

Combinatoire et dénombrement — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formule du binôme de Newton. Pour tous réels a, b et tout entier naturel n :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Les coefficients sont ceux de la **ligne** n du triangle de Pascal ; les puissances de a montent pendant que celles de b descendent, et leur somme vaut toujours n .

Premières lignes.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Avec une différence, on remplace b par $-b$: les signes **alternent**.

Terme général. Le terme d'indice k est $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$: pour trouver un coefficient, on écrit le terme général, puis on cherche k .

Sommes classiques (en choisissant a et b) :

- $a = b = 1 : \sum_k \binom{n}{k} = 2^n ;$
- $a = -1, b = 1 : \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ pour $n \geq 1 ;$
- $a = 2, b = 1 : \sum_k \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$

Inégalité de Bernoulli (pour $x \geq 0$) : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Correction de l'exercice 1 - Développer une puissance quatrième

On applique la **formule du binôme** avec $a = x, b = 2$ et $n = 4$; les coefficients sont ceux de la ligne 4 : 1, 4, 6, 4, 1.

$$(x + 2)^4 = x^4 + 4x^3 \times 2 + 6x^2 \times 2^2 + 4x \times 2^3 + 2^4$$

- $4 \times 2 = 8 ;$
- $6 \times 4 = 24 ;$
- $4 \times 8 = 32 ;$
- $2^4 = 16.$

$$(x + 2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

- **Contrôle** en $x = 1$: à gauche $3^4 = 81$, à droite $1 + 8 + 24 + 32 + 16 = 81 \checkmark$
- **Réflexe** : la somme des exposants de x et de 2 vaut 4 dans chaque terme.

Réponse. $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$.

Correction de l'exercice 2 - Une différence à la puissance 5

On écrit $x - 1 = x + (-1)$ et on applique la formule du binôme avec la ligne 5 : 1, 5, 10, 10, 5, 1.

$$(x-1)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k (-1)^{5-k}$$

Les puissances de -1 valent alternativement 1 et -1 : les **signes alternent**, en commençant par $+$ devant x^5 .

$$(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

— **Contrôle** en $x = 1$: à gauche 0 , à droite $1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$ ✓

— **Contrôle** en $x = 2$: à gauche 1 , à droite $32 - 80 + 80 - 40 + 10 - 1 = 1$ ✓

Réponse. $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.

Correction de l'exercice 3 - Quand a porte un coefficient

Formule du binôme avec $a = 2x$, $b = 3$, $n = 3$ (ligne 1, 3, 3, 1) :

$$(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \times 3 + 3(2x) \times 3^2 + 3^3$$

— $(2x)^3 = 8x^3$;

— $3 \times 4x^2 \times 3 = 36x^2$;

— $3 \times 2x \times 9 = 54x$;

— $3^3 = 27$.

$$(2x+3)^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

— **Piège** : il faut élever **tout** $2x$ à la puissance : $(2x)^2 = 4x^2$, et non $2x^2$.

— **Contrôle** en $x = 1$: $5^3 = 125$ et $8 + 36 + 54 + 27 = 125$ ✓

Réponse. $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$.

Correction de l'exercice 4 - Un seul coefficient

On écrit le **terme général** du développement avec $a = 2x$, $b = 1$, $n = 7$:

$$\binom{7}{k} (2x)^k \times 1^{7-k} = \binom{7}{k} 2^k x^k$$

— Le terme en x^3 correspond à $k = 3$.

— **Coefficient** :

$$\binom{7}{3} \times 2^3 = 35 \times 8 = 280$$

— **Piège** : ne pas oublier la puissance du coefficient 2 ; répondre 35 serait confondre le coefficient binomial et le coefficient du terme.

— **Méthode** : écrire le terme général, identifier k , puis calculer — c'est bien plus sûr que développer les 8 termes.

Réponse. Le coefficient de x^3 est 280 .

Correction de l'exercice 5 - Coefficient avec un signe

Terme général avec $a = x$, $b = -3$, $n = 6$:

$$\binom{6}{k} x^k (-3)^{6-k}$$

— Le terme en x^4 correspond à $k = 4$; alors $6 - k = 2$.

— **Coefficient** :

$$\binom{6}{4} \times (-3)^2 = 15 \times 9 = 135$$

- Le signe est **positif** car -3 est élevé à une puissance **paire**.
- **Contrôle** du coefficient suivant, pour vérifier l'alternance : en x^5 , $\binom{6}{5}(-3)^1 = -18$, négatif ✓

Réponse. Le coefficient de x^4 est 135.

Correction de l'exercice 6 - Terme indépendant de x

Terme général avec $a = x$, $b = \frac{1}{x}$, $n = 6$:

$$\binom{6}{k} x^k \left(\frac{1}{x}\right)^{6-k} = \binom{6}{k} x^k x^{-(6-k)} = \binom{6}{k} x^{2k-6}$$

- Le terme est constant lorsque l'exposant est nul : $2k - 6 = 0$, soit $k = 3$.
- **Terme constant** :

$$\binom{6}{3} = 20$$

- **Remarque** : les exposants $2k - 6$ sont tous **pairs** ($-6, -4, \dots, 6$) : le développement ne contient que des puissances paires de x .

Réponse. Le terme constant vaut 20.

Correction de l'exercice 7 - Un calcul approché

a) Avec la ligne 5 du triangle :

$$(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

b) Avec $x = 0,01$:

- $5x = 0,05$;
- $10x^2 = 0,001$;
- $10x^3 = 0,000\,01$;
- $5x^4 = 0,000\,000\,05$;
- $x^5 = 0,000\,000\,000\,1$.

En additionnant : $1,01^5 = 1,051\,010\,050\,1$ (valeur exacte).

- **Approximation** : $1 + 5x + 10x^2 = 1,051$; les termes négligés valent moins de 0,000 02.
- **Intérêt** : pour x petit, $(1 + x)^n \approx 1 + nx$; ici 1,05 donne déjà le bon ordre de grandeur (placement à 1 % pendant 5 ans).

Réponse. $1,01^5 = 1,0510100501 \approx 1,051$.

Correction de l'exercice 8 - Calcul mental

Formule du binôme avec $a = 100$, $b = -1$, $n = 4$:

$$(100 - 1)^4 = 100^4 - 4 \times 100^3 + 6 \times 100^2 - 4 \times 100 + 1$$

- $100^4 = 100\,000\,000$;
- $4 \times 100^3 = 4\,000\,000$;
- $6 \times 100^2 = 60\,000$;
- $4 \times 100 = 400$.

$$99^4 = 100\,000\,000 - 4\,000\,000 + 60\,000 - 400 + 1 = 96\,059\,601$$

- **Contrôle** : $99^2 = 9\,801$ et $9\,801^2 = 96\,059\,601$ ✓
- **Pourquoi ça marche** : les puissances de 100 décalent les chiffres sans se chevaucher, chaque terme se lit directement.

Réponse. $99^4 = 96\,059\,601$.

Correction de l'exercice 9 - Trois sommes d'un coup

On lit chaque somme comme un développement

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

en choisissant a et b .

- a) $a = b = 1$: chaque terme vaut $\binom{n}{k}$, donc la somme est $(1 + 1)^n = 2^n$.
- b) $a = -1, b = 1$: chaque terme vaut $(-1)^k \binom{n}{k}$, donc la somme est $(-1 + 1)^n = 0^n = 0$ (car $n \geq 1$).
- c) $a = 2, b = 1$: la somme vaut $(2 + 1)^n = 3^n$.

Vérification pour $n = 4$:

$$1 + 4 \times 2 + 6 \times 4 + 4 \times 8 + 1 \times 16 = 1 + 8 + 24 + 32 + 16 = 81 = 3^4 \quad \checkmark$$

- **Interprétation de c)** : 3^n compte les façons de colorier n objets en trois couleurs ; $\binom{n}{k} 2^k$ compte celles où k objets reçoivent l'une des deux premières couleurs.

Réponse. a) 2^n · b) 0 · c) 3^n (81 pour $n = 4$).

Correction de l'exercice 10 - Inégalité de Bernoulli

a) Formule du binôme avec $a = x$ et $b = 1$:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k$$

- Comme $x \geq 0$, chaque terme $\binom{n}{k} x^k$ est **positif ou nul**.
- On minore donc la somme en retirant les termes d'indice $k \geq 2$:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

b) Même raisonnement, en gardant cette fois les trois premiers termes : le troisième est $\binom{n}{2} x^2 = \frac{n(n-1)}{2} x^2$, et les termes suivants sont positifs.

- **Condition essentielle** : $x \geq 0$. Pour x négatif, les termes changent de signe et l'argument ne marche plus (l'inégalité a) reste vraie pour $x \geq -1$, mais se démontre par récurrence).

Réponse. On minore la somme en ne gardant que ses premiers termes, tous les autres étant positifs.

Correction de l'exercice 11 - Pourquoi une suite géométrique explose

a) Avec $q = 1 + x$ et $x > 0$, l'**inégalité de Bernoulli** donne, pour tout n :

$$q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

— Comme $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + nx) = +\infty$.

— Par **comparaison**, q^n , qui est plus grand, tend aussi vers $+\infty$.

b) Ici $x = 0,05$: il suffit que $1 + 0,05n > 1\,000$, soit $n > \frac{999}{0,05} = 19\,980$. L'inégalité garantit donc $q^n > 1\,000$ dès $n = 19\,981$.

— À la calculatrice, $1,05^{141} \approx 976$ et $1,05^{142} \approx 1\,025$: le seuil réel est $n = 142$.

— **Leçon** : la minoration est très grossière (elle remplace une croissance exponentielle par une croissance affine), mais elle **suffit** pour démontrer la limite.

Réponse. a) $q^n \geq 1 + n(q - 1) \rightarrow +\infty$ · b) $n = 19\,981$ suffit ; le vrai seuil est 142.

Correction de l'exercice 12 - Deux développements qui se compensent

On développe les deux puissances avec la formule du binôme, $a = \sqrt{2}$ et $b = \pm 1$:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

— Dans $(a - b)^4$, les termes de degré **impair** en b changent de signe.

— En additionnant, ils **s'annulent** :

$$(a + b)^4 + (a - b)^4 = 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)$$

— Avec $a = \sqrt{2}$, $b = 1$: $a^2 = 2$ et $a^4 = 4$, donc

$$2(4 + 6 \times 2 + 1) = 2 \times 17 = 34$$

— **Oui**, c'est un entier : seules les puissances **paires** de $\sqrt{2}$ survivent.

— **Contrôle numérique** : $\sqrt{2} + 1 \approx 2,4142$ et $2,4142^4 \approx 33,97$; $(\sqrt{2} - 1)^4 \approx 0,0294$; somme ≈ 34 ✓

Réponse. La somme vaut 34.

Correction de l'exercice 13 - Divisibilité et derniers chiffres

a) Formule du binôme avec $a = 10$, $b = 1$:

$$11^n = (10 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 10^k = 1 + 10n + \binom{n}{2} 10^2 + \dots + 10^n$$

— Tous les termes sauf le premier contiennent le facteur 10 :

$$11^n - 1 = 10 \left(n + \binom{n}{2} 10 + \dots \right) \text{ est un multiple de } 10.$$

b) À partir de $k = 2$, chaque terme contient $10^2 = 100$:

$$11^n = 1 + 10n + 100 \times N \quad (N \text{ entier})$$

— Ajouter un multiple de 100 ne change pas les deux derniers chiffres : 11^n et $1 + 10n$ se terminent de la même façon.

— Pour $n = 7$: $1 + 70 = 71$. Les deux derniers chiffres de 11^7 sont 7 et 1.

— **Contrôle** : $11^7 = 19\,487\,171$ ✓

Réponse. a) $11^n - 1$ est un multiple de 10 · b) 11^7 se termine par 71.

Correction de l'exercice 14 - Somme des carrés d'une ligne

a) $1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70$ et $\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{24} = 70$: les deux nombres sont **égaux**.

b) On calcule le coefficient de x^4 de deux façons.

- **Dans** $(1+x)^8$, par la formule du binôme : c'est $\binom{8}{4}$.
- **Dans le produit** $(1+x)^4(1+x)^4$: un terme en x^4 s'obtient en multipliant le terme en x^k du premier facteur par le terme en x^{4-k} du second, d'où

$$\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \binom{4}{4-k} = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k}^2$$

en utilisant la **symétrie** $\binom{4}{4-k} = \binom{4}{k}$.

- Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients : $\sum_k \binom{4}{k}^2 = \binom{8}{4}$.
- **Généralisation** : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Réponse. $1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70 = \binom{8}{4}$.

Correction de l'exercice 15 - Dériver le binôme

a) Par la formule du binôme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

- **Dérivée terme à terme** (le terme $k=0$ est constant) : $f'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$.
- **Dérivée de la forme compacte** : f est de la forme u^n , donc $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$.

b) En $x=1$, les deux expressions de $f'(1)$ sont égales :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

- **Vérification** pour $n=5$:
 $1 \times 5 + 2 \times 10 + 3 \times 10 + 4 \times 5 + 5 \times 1 = 5 + 20 + 30 + 20 + 5 = 80$, et $5 \times 2^4 = 80$ ✓
- **Interprétation** : S compte les comités (de taille quelconque) munis d'un président ; on choisit le président (n façons) puis n'importe quelle partie des $n-1$ autres (2^{n-1} façons).

Réponse. $S = n 2^{n-1}$; pour $n=5$: 80.