

Plaquette 5 - Problèmes de dénombrement : cartes, urnes, mots et grilles

Combinatoire et dénombrement — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le choix du modèle. Deux questions à se poser dans cet ordre :

1. L'**ordre** des éléments compte-t-il ? 2. Un élément peut-il être **répété** ?

Ordre	Répétition	Modèle	Nombre
oui	oui	p -liste	n^p
oui	non	arrangement	$\frac{n!}{(n-p)!}$
non	non	combinaison	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Principes de comptage.

- **Multiplicatif** : un choix en k étapes **indépendantes** donne le produit des possibilités.
- **Additif** : si les cas sont **incompatibles**, on additionne.
- **Complémentaire** : $|\overline{A}| = |E| - |A|$ — indispensable pour « au moins un ».
- **Crible** : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Coefficients binomiaux.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Anagrammes d'un mot de n lettres où la lettre i apparaît n_i fois :

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$$

Réflexe de contrôle : vérifier l'ordre de grandeur, et que le résultat est bien un entier.

Correction de l'exercice 1 - Mains de cartes

a) L'ordre ne compte pas : c'est une **combinaison**.

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{120} = 201\,376$$

b) On **découpe** le choix en deux étapes indépendantes :

— choisir 2 rois parmi les 4 : $\binom{4}{2} = 6$;

— choisir les 3 autres cartes parmi les 28 **non-rois** : $\binom{28}{3} = 3\,276$.

— **Principe multiplicatif** :

$$6 \times 3\,276 = 19\,656$$

— **Fréquence** : $\frac{19\,656}{201\,376} \approx 9,76 \%$.

- **Piège** : il faut choisir les trois autres cartes parmi les **non-rois**, sinon on compterait aussi les mains à 3 ou 4 rois — le mot « exactement » l'interdit.

Réponse. a) 201 376 · b) 19 656.

Correction de l'exercice 2 - Au moins un as

- **Passage au complémentaire** : on compte les mains **sans aucun** as.
- Il faut choisir les 5 cartes parmi les 28 non-as :

$$\binom{28}{5} = 98\,280$$

- **Mains avec au moins un as** :

$$201\,376 - 98\,280 = 103\,096$$

- **Fréquence** : $\approx 51,2\%$ — plus d'une main sur deux.
- **Pourquoi le complémentaire ?** Le comptage direct obligerait à sommer les cas « exactement 1, 2, 3, 4 as », soit quatre calculs au lieu d'un.

- **Contrôle** :

$$\binom{4}{1}\binom{28}{4} + \binom{4}{2}\binom{28}{3} + \binom{4}{3}\binom{28}{2} + \binom{4}{4}\binom{28}{1} = 81\,900 + 19\,656 + 1\,512 + 28 = 103\,096$$

✓

Réponse. 103 096 mains.

Correction de l'exercice 3 - Tirages dans une urne

- a) Tirage **simultané** : l'ordre ne compte pas, il y a 12 boules.

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

- b) On choisit une boule de chaque couleur, indépendamment :

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

- **Probabilité correspondante** : $\frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 27,3\%$.
- **Contrôle par les autres cas** : trois boules de même couleur,
 $\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 4 + 1 = 15$; deux d'une couleur et une d'une autre,
 $220 - 60 - 15 = 145$.
- **Attention** : si le tirage était **successif avec remise**, on aurait $12^3 = 1\,728$ tirages — modèle complètement différent.

Réponse. a) 220 · b) 60.

Correction de l'exercice 4 - Anagrammes

- **Décompte** : P(1), A(2), R(1), L(3), E(2) — total 9 lettres ✓
- **Formule** :

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!} = \frac{362\,880}{24} = 15\,120$$

- **Justification** : à lettres toutes distinctes il y aurait 9! mots ; chaque anagramme réel est compté $2! \times 3! \times 2! = 24$ fois.
- **Contrôle de plausibilité** : $15\,120 \ll 362\,880$, le facteur de réduction est bien 24 ✓
- **Variante** : combien commencent par P ? Il reste 8 lettres à permuter, soit
 $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{40\,320}{24} = 1\,680$.

Réponse. $\frac{9!}{2!3!2!} = 15\,120$.

Correction de l'exercice 5 - Codes et mots de passe

a) **Principe multiplicatif**, chaque position étant indépendante :

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 = 67\,600$$

b) Les lettres doivent différer entre elles, les chiffres aussi :

— lettres : $26 \times 25 = 650$;

— chiffres : $10 \times 9 = 90$.

$$650 \times 90 = 58\,500$$

— **Proportion** : $\frac{58\,500}{67\,600} \approx 86,5\%$ des codes n'ont aucune répétition.

— **Remarque** : lettres et chiffres ne peuvent de toute façon pas être égaux entre eux — les deux contraintes sont **indépendantes**, d'où le produit.

Réponse. a) 67 600 · b) 58 500.

Correction de l'exercice 6 - Chemins sur une grille

— **Modélisation** : tout trajet minimal est une suite de 7 déplacements, dont 4 « est » (E) et 3 « nord » (N).

— Le trajet est déterminé par le **choix des positions** des N parmi les 7 :

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

— **Contrôle** : on peut aussi choisir les positions des E, $\binom{7}{4} = 35$ ✓ (propriété $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$).

— **Vérification par le triangle de Pascal** : le nombre de chemins vers un carrefour est la **somme** de ceux des deux carrefours précédents — c'est exactement la relation

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

— **Modèle très courant** : mots binaires, tirages ordonnés, marches aléatoires.

Réponse. $\binom{7}{3} = 35$ trajets.

Correction de l'exercice 7 - Comités avec contrainte

a) $\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{24} = 495$.

b) **Complémentaire** : on retire les comités **non mixtes**.

— Que des femmes : $\binom{7}{4} = 35$.

— Que des hommes : $\binom{5}{4} = 5$.

— **Comités mixtes** :

$$495 - 35 - 5 = 455$$

— **Fréquence** : $\frac{455}{495} \approx 91,9\%$ des comités sont mixtes.

— **Contrôle par décomposition** :

$$\binom{7}{1}\binom{5}{3} + \binom{7}{2}\binom{5}{2} + \binom{7}{3}\binom{5}{1} = 70 + 210 + 175 = 455 \quad \checkmark$$

- **Méthode** : « au moins un de chaque » se traite par **double complémentaire** — les deux cas exclus étant incompatibles, on les soustrait simplement.

Réponse. a) 495 · b) 455.

Correction de l'exercice 8 - Formule du binôme

- **Formule** : $(a + b)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^k b^{4-k}$, avec $a = 2x$ et $b = -3$.

- **Coefficients** : $\binom{4}{0}, \dots, \binom{4}{4} = 1, 4, 6, 4, 1$.

— **Termes** :

- $k = 4$: $(2x)^4 = 16x^4$;
- $k = 3$: $4 \times (2x)^3 \times (-3) = -96x^3$;
- $k = 2$: $6 \times 4x^2 \times 9 = 216x^2$;
- $k = 1$: $4 \times 2x \times (-27) = -216x$;
- $k = 0$: 81.

$$(2x - 3)^4 = 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$$

- **Contrôle en** $x = 1$: $(2 - 3)^4 = 1$, et $16 - 96 + 216 - 216 + 81 = 1$ ✓
- **Contrôle en** $x = 0$: $(-3)^4 = 81$ ✓

Réponse. $16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$.

Correction de l'exercice 9 - Somme de coefficients binomiaux

- **Première somme** : on applique le binôme à $(1 + 1)^6$,

$$\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} = 2^6 = 64$$

- **Contrôle** : $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$ ✓

- **Seconde somme** : on applique le binôme à $(1 - 1)^6$,

$$\sum_{k=0}^6 (-1)^k \binom{6}{k} = 0^6 = 0$$

- **Contrôle** : $1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$ ✓

- **Conséquence** : les coefficients de rang **pair** et de rang **impair** ont la même somme, 32 chacun — autrement dit, un ensemble à 6 éléments a autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair.

- **Interprétation ensembliste** : $2^6 = 64$ est le nombre total de **parties** d'un ensemble à 6 éléments.

Réponse. 64 et 0.

Correction de l'exercice 10 - Répartition en groupes

- **Groupes étiquetés** (groupe A, groupe B) : $\binom{10}{5} = 252$.

- **Groupes indiscernables** : chaque répartition est comptée **deux fois** (échanger A et B donne la même partition).

$$\frac{252}{2} = 126$$

- **Justification de la division** : les deux groupes ayant la **même taille**, ils sont interchangeables.
- **Contraste instructif** : pour des groupes de tailles **différentes** (7 et 3), il n'y aurait **pas** de division — les groupes se distinguent par leur effectif, et la réponse serait $\binom{10}{3} = 120$.
- **Contrôle** : $126 < 252 \checkmark$, et $126 = \frac{1}{2} \binom{10}{5}$ est bien un entier.

Réponse. $\frac{1}{2} \binom{10}{5} = 126$.

Correction de l'exercice 11 - Dénombrement et probabilité

- **Univers** : $\binom{32}{4} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{24} = 35\,960$ mains équiprobables.
- **Cas favorables** : 2 cœurs parmi 8, et 2 cartes parmi les 24 autres,

$$\binom{8}{2} \times \binom{24}{2} = 28 \times 276 = 7\,728$$
- **Probabilité** :

$$\frac{7\,728}{35\,960} \approx 0,2149$$
- Soit environ 21,5 %.
- **Contrôle de vraisemblance** : un quart des cartes sont des cœurs, donc on attend en moyenne 1 cœur sur 4 cartes ; obtenir exactement 2 est un peu au-dessus de la moyenne — 21 % est plausible $\checkmark$
- **Modèle** : c'est la loi **hypergéométrique**, celle du tirage **sans remise**.

Réponse. $\frac{\binom{8}{2} \binom{24}{2}}{\binom{32}{4}} \approx 0,215$.

Correction de l'exercice 12 - Parties d'un ensemble

a) Une partie se détermine par 8 **choix binaires** indépendants (chaque élément est dedans ou dehors) :

$$|P(E)| = 2^8 = 256$$

b) - **Exactement 3 éléments** : $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$.

— **Au plus 2 éléments** : on somme les cardinaux 0, 1 et 2,

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 1 + 8 + 28 = 37$$

— **Contrôle global** : $\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} = 2^8 = 256 \checkmark$ (soit $1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1$).

— **Symétrie** : $\binom{8}{k} = \binom{8}{8-k}$ — il y a autant de parties à 3 éléments qu'à 5 $\checkmark$

Réponse. a) 256 · b) 56 et 37.

Correction de l'exercice 13 - Podium et classement

a) Les trois places sont **distinctes** : c'est un **arrangement**.

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

b) Un classement complet est une **permutation** des 10 coureurs :

$$10! = 3\,628\,800$$

- **Rapport** : $\frac{10!}{720} = 5\,040 = 7!$ — chaque podium se prolonge en 7! classements des places restantes ✓
- **Comparaison** : si l'on demandait seulement « quels sont les trois premiers » sans l'ordre, ce serait $\binom{10}{3} = 120$, soit 6 fois moins que 720 ✓
- **Réflexe** : « podium » = ordre ; « les trois qualifiés » = combinaison.

Réponse. a) 720 · b) 10! = 3 628 800.

Correction de l'exercice 14 - Triangle de Pascal

- **Relation de Pascal** : $\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4}$.
- **Calculs** : $\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$ et $\binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{24} = 126$.

$$\binom{10}{4} = 84 + 126 = 210$$
- **Contrôle direct** : $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{24} = \frac{5\,040}{24} = 210$ ✓
- **Démonstration combinatoire** : on fixe un élément a ; les parties à 4 éléments **contenant** a sont au nombre de $\binom{9}{3}$, celles qui ne le contiennent **pas** au nombre de $\binom{9}{4}$. Ces deux cas sont **incompatibles** et recouvrent tout.
- **Usage** : c'est la règle de construction du triangle de Pascal, qui évite tout calcul de factorielle.

Réponse. $\binom{10}{4} = 84 + 126 = 210$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : tirage de dés

a) Chaque dé est indépendant : c'est une 5-**liste** sur 6 valeurs.

$$6^5 = 7\,776$$

b) On procède en deux étapes :

- choisir **quels** dés donnent un 6 : $\binom{5}{3} = 10$;
- les 2 autres dés doivent donner **autre chose** que 6, soit 5 valeurs chacun : $5^2 = 25$.

$$10 \times 25 = 250$$
- **Probabilité** : $\frac{250}{7\,776} \approx 3,2 \%$.
- **Contrôle par la loi binomiale** : $X \sim B\left(5; \frac{1}{6}\right)$ donne $\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{7\,776}$ ✓
- **Lien à retenir** : le dénombrement « exactement k succès » et la **loi binomiale** sont le même calcul, écrit différemment.

Réponse. a) 7 776 · b) 250.