

Plaquette 3 – Triangle de Pascal

Combinatoire et dénombrement – Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Coefficient binomial. $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Valeurs à connaître. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Symétrie. Choisir les k éléments qu'on garde revient à choisir les $n-k$ qu'on laisse :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Relation de Pascal (pour $1 \leq k \leq n-1$) :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dans le triangle : chaque nombre est la **somme des deux nombres situés au-dessus** (juste au-dessus et au-dessus à gauche).

Somme d'une ligne. Un ensemble à n éléments a 2^n parties :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Chemins dans une grille. Aller de $(0; 0)$ à $(p; q)$ par pas « droite » ou « haut » : un chemin compte $p+q$ pas, dont on choisit les q pas « haut », soit $\binom{p+q}{q}$ chemins.

Correction de l'exercice 1 – Construire le triangle

On part de la ligne 0 (un seul 1) ; chaque ligne commence et finit par 1, et chaque nombre intérieur est la somme des deux nombres au-dessus de lui, d'après la **relation de Pascal** :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

n	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

— Par exemple, ligne 7 : $21 = 6 + 15$ et $35 = 15 + 20$.

— **Lecture** : $\binom{7}{3} = 35$ et $\binom{7}{5} = 21$.

— **Contrôle** par la formule : $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \checkmark$

Réponse. $\binom{7}{3} = 35$ et $\binom{7}{5} = 21$.

Correction de l'exercice 2 - Descendre d'une ligne

— **Relation de Pascal** avec $n = 10$ et $k = 4$:

$$\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 84 + 126 = 210$$

— **Symétrie** : garder 6 éléments parmi 10, c'est en laisser 4 :

$$\binom{10}{6} = \binom{10}{10-6} = \binom{10}{4} = 210$$

— **Contrôle** : $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5040}{24} = 210 \checkmark$

— **Piège** : on additionne les deux coefficients de la ligne **précédente** ($n = 9$), d'indices $k - 1 = 3$ et $k = 4$ — pas deux coefficients de la même ligne.

Réponse. $\binom{10}{4} = \binom{10}{6} = 210$.

Correction de l'exercice 3 - La symétrie fait gagner du temps

On utilise la **symétrie** pour se ramener à un petit indice :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

a) $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$.

b) $\binom{50}{49} = \binom{50}{1} = 50$: choisir 49 éléments parmi 50, c'est désigner le seul qu'on écarte.

c) $\binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1320}{6} = 220$.

Pourquoi c'est plus rapide. Avec $\binom{20}{18} = \frac{20!}{18!2!}$, on simplifie de toute façon $18!$: il ne reste que les **deux** plus grands facteurs au numérateur. La symétrie fait cette simplification d'un coup.

Réponse. a) 190 · b) 50 · c) 220 .

Correction de l'exercice 4 - Compter toutes les parties

a) Un groupe est une **partie** de l'ensemble des 10 membres. Pour chaque personne, deux choix : dedans ou dehors. Principe multiplicatif :

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10} = 1\,024$$

b) On passe par le **complémentaire** : les groupes de moins de deux personnes sont

— le groupe vide : $\binom{10}{0} = 1$;

— les 10 groupes d'une personne : $\binom{10}{1} = 10$.

$$1\,024 - 1 - 10 = 1\,013$$

— **Lien avec le triangle** : la somme de la ligne 10 vaut 2^{10} ; on retire ses deux premiers termes.

Réponse. a) 1 024 groupes · b) 1 013 groupes.

Correction de l'exercice 5 - Démontrer la relation de Pascal par le calcul

On écrit les deux termes avec la formule du cours :

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \quad \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

— **Dénominateur commun** $k!(n-k)!$: on multiplie le premier terme par $\frac{k}{k}$ (car $k! = k \times (k-1)!$) et le second par $\frac{n-k}{n-k}$ (car $(n-k)! = (n-k) \times (n-k-1)!$).

— **Somme** :

$$\frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!}$$

— **Simplification** : $k+n-k = n$ et $n \times (n-1)! = n!$, d'où

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Le point clé : les deux fractions n'ont pas le même dénominateur ; il faut « compléter » les factorielles pour les réunir.

Réponse. La somme vaut $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Correction de l'exercice 6 - Démontrer la relation de Pascal par dénombrement

On compte **de deux façons** le nombre de comités.

— **Directement** : on choisit k élèves parmi n , soit $\binom{n}{k}$ comités.

— **En séparant deux cas incompatibles** :

— Léa fait partie du comité : il reste $k-1$ places à pourvoir parmi les $n-1$ autres élèves, soit $\binom{n-1}{k-1}$ comités ;

- Léa n'en fait pas partie : les k membres sont choisis parmi les $n - 1$ autres, soit $\binom{n-1}{k}$ comités.
- Les deux cas ne se recouvrent pas et couvrent toutes les situations : par le **principe additif**,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Méthode à retenir. Pour démontrer une égalité entre entiers qui comptent quelque chose, on peut **dénombrer un même ensemble de deux manières**, sans aucun calcul de factorielle.

Réponse. Comités avec Léa $\binom{n-1}{k-1}$ + comités sans Léa $\binom{n-1}{k}$ = tous les comités $\binom{n}{k}$.

Correction de l'exercice 7 - Chemins dans un quadrillage

- a) Il faut avancer de 4 vers la droite et de 3 vers le haut : chaque chemin compte exactement $4 + 3 = 7$ pas, dont 4 « D » et 3 « H ».
- b) Un chemin est un **mot de 7 lettres** contenant 3 lettres H. Il est entièrement déterminé par la **position des 3 pas « haut »** parmi les 7 :

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

- Le chemin tracé correspond au mot DDHDHHD : ses H sont en positions 3, 5 et 6.
- **Contrôle** par symétrie : choisir les positions des 4 pas « droite » donne $\binom{7}{4} = 35$ ✓
- **Lien avec le triangle** : le nombre de chemins jusqu'à un point est la somme des nombres de chemins jusqu'au point de gauche et jusqu'au point du dessous — c'est exactement la relation de Pascal.

Réponse. 7 pas ; $\binom{7}{3} = 35$ chemins.

Correction de l'exercice 8 - Chemins imposant un passage

On découpe le trajet en **deux étapes indépendantes** et on applique le **principe multiplicatif**.

- **De** $A(0; 0)$ **à** $C(2; 1)$: 3 pas dont 1 « haut », soit $\binom{3}{1} = 3$ chemins.
- **De** $C(2; 1)$ **à** $B(4; 3)$: il reste 2 pas à droite et 2 vers le haut, soit 4 pas dont 2 « haut » : $\binom{4}{2} = 6$ chemins.
- **Total** :

$$\binom{3}{1} \times \binom{4}{2} = 3 \times 6 = 18$$

- b) Il y a 35 chemins au total (exercice précédent) : la proportion vaut $\frac{18}{35} \approx 51,4$ %.
- **Piège** : on **multiplie** (chaque début de trajet se combine avec chaque fin), on n'additionne pas.

Réponse. a) 18 chemins · b) $\frac{18}{35} \approx 51,4$ %.

Correction de l'exercice 9 - Président et comité

a) On compte les couples (comité, président).

— **Méthode 1** : on choisit d'abord le comité, $\binom{n}{k}$ façons, puis le président parmi ses k membres, k façons : $k\binom{n}{k}$.

— **Méthode 2** : on choisit d'abord le président parmi les n personnes, n façons, puis les $k - 1$ autres membres parmi les $n - 1$ restants : $n\binom{n-1}{k-1}$.

— Les deux méthodes comptent le **même ensemble** :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

b) Pour $n = 5$, $k = 2$:

— à gauche, $2 \times \binom{5}{2} = 2 \times 10 = 20$;

— à droite, $5 \times \binom{4}{1} = 5 \times 4 = 20$ ✓

Usage. Cette « formule du pion » permet de sortir un facteur k d'une somme ; elle resservira pour calculer l'espérance d'une loi binomiale.

Réponse. Les deux membres comptent les comités avec président ; pour $n = 5$, $k = 2$: $20 = 20$.

Correction de l'exercice 10 - La crosse de hockey

a) $S = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$, et $\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$: on trouve $S = \binom{6}{3}$.

b) On part de $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$ (les deux valent 1) et on applique la **relation de Pascal** à chaque étape :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

— $\binom{3}{3} + \binom{3}{2} = \binom{4}{3}$;

— $\binom{4}{3} + \binom{4}{2} = \binom{5}{3}$;

— $\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}$.

Chaque terme de la somme « s'absorbe » dans le coefficient voisin de la ligne suivante.

— **Dans le triangle**, les termes additionnés forment une colonne, et le résultat se lit juste en dessous, décalé d'un cran : la forme d'une crosse de hockey.

— **Généralisation** : $\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Réponse. $S = 20 = \binom{6}{3}$.

Correction de l'exercice 11 - Somme alternée d'une ligne

a) $1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$: les termes se compensent deux à deux par **symétrie** ($\binom{5}{k} = \binom{5}{5-k}$, de signes opposés car k et $5 - k$ n'ont pas la même parité).

b) $1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$. Ici la symétrie ne suffit pas (les termes symétriques ont le même signe), mais la somme est encore nulle. Le résultat général, qui découlera de la formule du binôme, est :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1)$$

c) La somme alternée nulle signifie : (nombre de parties de cardinal pair) = (nombre de parties de cardinal impair). Comme il y a $2^5 = 32$ parties en tout, chaque catégorie en compte 16.

— **Contrôle direct** : $\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 1 + 10 + 5 = 16 \checkmark$

Réponse. a) 0 · b) 0 · c) 16 parties de cardinal pair.

Correction de l'exercice 12 - Une ligne d'indice premier

a) Ligne 6 : 6, 15, 20, 15, 6. Or 15 et 20 ne sont pas multiples de 6 : **non**.

Ligne 7 : 7, 21, 35, 35, 21, 7, tous multiples de 7 : **oui**.

b) Pour $1 \leq k \leq 6$:

$$\binom{7}{k} = \frac{7!}{k!(7-k)!} = \frac{7 \times 6!}{k!(7-k)!}$$

- $\binom{7}{k}$ est un **entier** (il compte des parties).
- Le dénominateur $k!(7-k)!$ est un produit d'entiers tous compris entre 1 et 6 : aucun n'est divisible par 7, et comme 7 est **premier**, leur produit n'est pas divisible par 7.
- Le facteur 7 du numérateur ne peut donc pas être « simplifié » : il reste dans le résultat, et $\binom{7}{k}$ est un multiple de 7.

Pourquoi la ligne 6 échoue : $6 = 2 \times 3$ n'est pas premier, et les facteurs 2 et 3 du dénominateur peuvent l'absorber.

Réponse. Ligne 6 : non (15, 20) ; ligne 7 : oui, car 7 est premier.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver la taille d'un groupe

Une poignée de main correspond à une **paire** de personnes (l'ordre ne compte pas). Avec n participants, il y en a

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- **Équation** : $\frac{n(n-1)}{2} = 45$, soit $n^2 - n - 90 = 0$.
- **Discriminant** : $\Delta = 1 + 360 = 361 = 19^2$.
- **Racines** : $n = \frac{1+19}{2} = 10$ ou $n = \frac{1-19}{2} = -9$.
- n est un entier naturel : on garde $n = 10$.
- **Contrôle** : $\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \checkmark$

Autre lecture : dans le triangle, on cherche la ligne dont le troisième terme vaut 45 — c'est la ligne 10.

Réponse. 10 personnes.

Correction de l'exercice 14 - Le plus grand coefficient d'une ligne

a) Avec la formule factorielle :

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k!}{(k+1)!} \times \frac{(n-k)!}{(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}$$

b) Pour $n = 10$, le quotient vaut $\frac{10-k}{k+1}$.

— Il est **strictement supérieur à 1** lorsque $10 - k > k + 1$, soit $k < 4,5$, c'est-à-dire $k \leq 4$: de $\binom{10}{0}$ à $\binom{10}{5}$, chaque terme est plus grand que le précédent.

— Il est **strictement inférieur à 1** pour $k \geq 5$: ensuite les termes diminuent.

— **Maximum** :

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{120} = \frac{30\,240}{120} = 252$$

— **Contrôle** : la ligne 10 est 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, ... ✓

Réponse. Le maximum de la ligne 10 est $\binom{10}{5} = 252$.

Correction de l'exercice 15 - Filles et garçons au comité

a) On choisit 3 personnes parmi 9 :

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$$

b) Un comité à k filles contient $3 - k$ garçons ; par le **principe multiplicatif**, il y en a $\binom{5}{k} \binom{4}{3-k}$.

Filles k	Garçons	Nombre de comités
0	3	$\binom{5}{0} \binom{4}{3} = 1 \times 4 = 4$
1	2	$\binom{5}{1} \binom{4}{2} = 5 \times 6 = 30$
2	1	$\binom{5}{2} \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$
3	0	$\binom{5}{3} \binom{4}{0} = 10 \times 1 = 10$

— Les cas sont incompatibles : **principe additif**, $4 + 30 + 40 + 10 = 84$ ✓

— C'est un cas particulier de la **formule de Vandermonde** : $\sum_k \binom{a}{k} \binom{b}{m-k} = \binom{a+b}{m}$.

Réponse. a) 84 comités · b) $4 + 30 + 40 + 10 = 84$.