

Plaquette 4 – Formule du binôme

Combinatoire et dénombrement – Terminale spé maths

Exercices

Méthode

La formule du binôme développe $(a + b)^n$ avec les coefficients du triangle de Pascal. On l'utilise pour **développer**, pour isoler **un seul coefficient** (terme général), pour faire des **calculs approchés**, et pour démontrer des **sommes** en choisissant bien a et b .

Exercice 1 – Développer une puissance quatrième

Développer et réduire $(x + 2)^4$.

Exercice 2 – Une différence à la puissance 5

Développer et réduire $(x - 1)^5$.

Exercice 3 – Quand a porte un coefficient

Développer et réduire $(2x + 3)^3$.

Exercice 4 – Un seul coefficient

Sans développer entièrement, déterminer le coefficient de x^3 dans $(1 + 2x)^7$.

Exercice 5 – Coefficient avec un signe

Déterminer le coefficient de x^4 dans $(x - 3)^6$.

Exercice 6 – Terme indépendant de x

Pour $x \neq 0$, on développe $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$. Déterminer le terme **constant** (qui ne dépend pas de x).

Exercice 7 – Un calcul approché

- Développer $(1 + x)^5$.
- En déduire la valeur **exacte** de $1,01^5$, puis une valeur approchée à 10^{-3} près en ne gardant que les premiers termes.

Exercice 8 – Calcul mental

Calculer 99^4 sans calculatrice, en écrivant $99 = 100 - 1$.

Exercice 9 - Trois sommes d'un coup

Soit n un entier naturel non nul. À l'aide de la formule du binôme, calculer :

- a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
- b) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
- c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$, puis vérifier pour $n = 4$.

Exercice 10 - Inégalité de Bernoulli

Soit $x \geq 0$ et $n \geq 2$ un entier.

- a) À l'aide de la formule du binôme, démontrer que $(1+x)^n \geq 1+nx$.
- b) Démontrer de même que $(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$.

Exercice 11 - Pourquoi une suite géométrique explose

Soit $q > 1$. On pose $x = q - 1 > 0$.

- a) À l'aide de l'inégalité de Bernoulli, démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- b) Pour $q = 1,05$, donner un rang n à partir duquel l'inégalité garantit $q^n > 1\,000$. Comparer au plus petit rang trouvé à la calculatrice.

Exercice 12 - Deux développements qui se compensent

Calculer $(\sqrt{2} + 1)^4 + (\sqrt{2} - 1)^4$. Le résultat est-il un entier ?

Exercice 13 - Divisibilité et derniers chiffres

Soit $n \geq 2$ un entier.

- a) En écrivant $11 = 10 + 1$, démontrer que $11^n - 1$ est divisible par 10.
- b) Démontrer que 11^n et $1 + 10n$ ont les mêmes deux derniers chiffres. En déduire les deux derniers chiffres de 11^7 .

Exercice 14 - Somme des carrés d'une ligne

- a) Calculer $\binom{4}{0}^2 + \binom{4}{1}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{3}^2 + \binom{4}{4}^2$ et comparer à $\binom{8}{4}$.
- b) En remarquant que $(1+x)^8 = (1+x)^4(1+x)^4$, expliquer ce résultat en comparant les coefficients de x^4 .

Exercice 15 - Dériver le binôme

Soit $n \geq 1$ et $f(x) = (1+x)^n$.

- a) Écrire $f(x)$ avec la formule du binôme, puis dériver les deux expressions de f .
- b) En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$, puis vérifier pour $n = 5$.