

Plaquette 3 - Triangle de Pascal

Combinatoire et dénombrement — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Le triangle de Pascal range les coefficients $\binom{n}{k}$: la ligne n se construit à partir de la ligne $n - 1$ par **additions**. On s'en sert pour calculer vite, mais surtout pour **démontrer** des identités, soit par le calcul (factorielles), soit par un **raisonnement de dénombrement** (compter la même chose de deux façons).

Exercice 1 - Construire le triangle

Construire les lignes $n = 0$ à $n = 7$ du triangle de Pascal, en n'utilisant que des additions. En déduire $\binom{7}{3}$ et $\binom{7}{5}$.

Exercice 2 - Descendre d'une ligne

On sait que $\binom{9}{3} = 84$ et $\binom{9}{4} = 126$. Sans calculer de factorielle, donner $\binom{10}{4}$, puis $\binom{10}{6}$.

Exercice 3 - La symétrie fait gagner du temps

Calculer, en choisissant la forme la plus rapide :

- a) $\binom{20}{18}$
- b) $\binom{50}{49}$
- c) $\binom{12}{9}$

Exercice 4 - Compter toutes les parties

Un club de 10 personnes veut former un groupe de travail (de taille quelconque, éventuellement vide).

- a) Combien de groupes possibles ?
- b) Combien de groupes comptent **au moins deux** personnes ?

Exercice 5 - Démontrer la relation de Pascal par le calcul

Soit $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n - 1$. En partant de la formule factorielle, démontrer que

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Exercice 6 - Démontrer la relation de Pascal par dénombrement

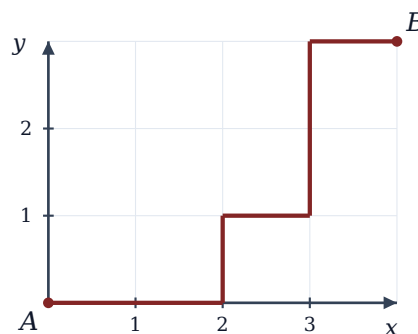
Une classe compte n élèves, dont Léa. On choisit un comité de k élèves ($1 \leq k \leq n - 1$).

En distinguant les comités qui contiennent Léa de ceux qui ne la contiennent pas, redémontrer la relation de Pascal.

Exercice 7 - Chemins dans un quadrillage

Un robot part du point $A(0; 0)$ et doit rejoindre $B(4; 3)$ en ne se déplaçant que d'une unité **vers la droite** ou **vers le haut**. Un chemin possible est tracé.

- Combien de pas compte chaque chemin ?
- Combien de chemins différents le robot peut-il suivre ?



Le chemin DDHDDHDD

Exercice 8 - Chemins imposant un passage

Dans le quadrillage de l'exercice précédent, on impose au robot de passer par le point $C(2; 1)$.

- Combien de chemins passent par C ?
- Quelle proportion des chemins de A à B cela représente-t-il ?

Exercice 9 - Président et comité

On veut démontrer que, pour $1 \leq k \leq n$:

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

- Démontrer cette égalité en comptant de deux façons les comités de k personnes (parmi n) dont l'un des membres est désigné président.
- Vérifier l'égalité pour $n = 5$ et $k = 2$.

Exercice 10 - La crosse de hockey

- Calculer $S = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}$ et comparer à un coefficient de la ligne 6.
- Expliquer ce résultat en appliquant plusieurs fois la relation de Pascal.

Exercice 11 - Somme alternée d'une ligne

- a) Calculer $1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1$, somme alternée de la ligne 5.
- b) Même question pour la ligne 4.
- c) Un ensemble E a 5 éléments. Combien a-t-il de parties de cardinal **pair** (0, 2 ou 4) ?

Exercice 12 - Une ligne d'indice premier

- a) Observer les lignes 6 et 7 du triangle : les coefficients intérieurs (ni le premier, ni le dernier) sont-ils tous divisibles par le numéro de la ligne ?
- b) Expliquer, à l'aide de la formule factorielle, pourquoi $\binom{7}{k}$ est divisible par 7 pour $1 \leq k \leq 6$.

Exercice 13 - Retrouver la taille d'un groupe

À la fin d'une réunion, chaque participant serre la main de chacun des autres une seule fois. On compte 45 poignées de main.

Combien de personnes étaient présentes ?

Exercice 14 - Le plus grand coefficient d'une ligne

- a) Pour $0 \leq k \leq n - 1$, montrer que $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}$.
- b) En déduire que, sur la ligne 10, les coefficients augmentent jusqu'à $k = 5$ puis diminuent. Calculer ce maximum.

Exercice 15 - Filles et garçons au comité

Une association compte 5 filles et 4 garçons. On forme un comité de 3 membres.

- a) Combien de comités possibles au total ?
- b) Compter ces comités selon le nombre k de filles qu'ils contiennent, et vérifier que l'on retrouve le résultat du a).