

Plaquette 1 - Dérivée d'une fonction composée

Compléments sur la dérivation — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivée d'une composée. Si u est dérivable sur I et g dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$, alors $g \circ u$ est dérivable sur I et

$$(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u) \quad \text{soit} \quad [g(u(x))]' = u'(x) g'(u(x))$$

Cas d'une fonction affine à l'intérieur : $[g(ax + b)]' = a g'(ax + b)$.

Formules à connaître (u dérivable, avec les conditions indiquées) :

Fonction	Dérivée	Condition
u^n (n entier ≥ 1)	$n u' u^{n-1}$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$
u^n (n entier ≤ -1)	$n u' u^{n-1}$	$u \neq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
e^u	$u' e^u$	
$\cos u$	$-u' \sin u$	
$\sin u$	$u' \cos u$	

Rappels : $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Erreur n°1 : oublier le facteur u' — par exemple écrire $[(3x + 1)^4]' = 4(3x + 1)^3$ au lieu de $12(3x + 1)^3$.

Correction de l'exercice 1 - Repérer la structure

On cherche l'opération faite **en premier** (c'est u , la fonction intérieure), puis celle appliquée **au résultat** (c'est g , la fonction extérieure) : $h(x) = g(u(x))$.

a) $u(x) = 3x^2 + 1$ et $g(X) = \sqrt{X}$.

b) $u(x) = -x^2$ et $g(X) = e^X$.

c) $u(x) = 2x - 5$ et $g(X) = X^4$.

d) $u(x) = 3x$ et $g(X) = \cos X$.

La formule de dérivation s'écrit ensuite

$$h'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

— **Astuce :** imaginer le calcul à la calculatrice. Pour $h_1(2)$, on calcule d'abord $3 \times 4 + 1 = 13$ (c'est u), puis $\sqrt{13}$ (c'est g).

— **Piège :** l'ordre compte. $\sqrt{3x^2 + 1}$ n'est pas $3(\sqrt{x})^2 + 1$.

Réponse. a) $u = 3x^2 + 1$, $g(X) = \sqrt{X}$ · b) $u = -x^2$, $g = \exp$ · c) $u = 2x - 5$, $g = X^4$ · d) $u = 3x$, $g = \cos$.

Correction de l'exercice 2 - Une fonction affine à l'intérieur

Quand la fonction intérieure est **affine**, $u(x) = ax + b$, la formule devient

$$[g(ax + b)]' = a g'(ax + b)$$

a) $a = 3$ et $\exp' = \exp$: $f(x) = 3e^{3x-2}$.

b) $a = 4$ et la dérivée de $\sqrt{X}$ est $\frac{1}{2\sqrt{X}}$:

$$g'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

c) $a = -5$ et la dérivée de X^3 est $3X^2$: $h'(x) = -5 \times 3(2-5x)^2 = -15(2-5x)^2$.

— **Contrôle du signe en c)** : $h'(x) \leq 0$, cohérent avec le fait que $2-5x$ **décroît**, donc son cube aussi.

Réponse. a) $3e^{3x-2}$ · b) $\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$ · c) $-15(2-5x)^2$.

Correction de l'exercice 3 - Puissances d'un polynôme

On applique

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

a) $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, $n = 3$:

$$f(x) = 3 \times 2x \times (x^2 + 1)^2 = 6x(x^2 + 1)^2$$

b) $u(x) = 1 - x^3$, $u'(x) = -3x^2$, $n = 4$:

$$g'(x) = 4 \times (-3x^2) \times (1 - x^3)^3 = -12x^2(1 - x^3)^3$$

— **Pourquoi ne pas développer** : $(x^2 + 1)^3$ développé donne $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$, de dérivée $6x^5 + 12x^3 + 6x = 6x(x^2 + 1)^2$ — même résultat, mais la forme factorisée donne **directement le signe** : $f(x)$ a le signe de x .

Réponse. a) $6x(x^2 + 1)^2$ · b) $-12x^2(1 - x^3)^3$.

Correction de l'exercice 4 - Une puissance négative

a) Avec $u(x) = x^2 + 1$ (qui ne s'annule pas), $u'(x) = 2x$ et $n = -2$:

$$f(x) = -2 \times 2x \times (x^2 + 1)^{-3} = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^3}$$

b) Avec $v(x) = (x^2 + 1)^2$, on a $v'(x) = 2 \times 2x(x^2 + 1) = 4x(x^2 + 1)$, donc

$$f(x) = -\frac{4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^3}$$

Les deux méthodes concordent.

c) Le dénominateur est strictement positif : $f(x)$ a le signe de $-4x$.

— f est **croissante** sur $] -\infty ; 0]$ et **décroissante** sur $[0 ; +\infty[$;

— maximum $f(0) = 1$.

Réponse. $f(x) = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^3}$; maximum 1 en 0.

Correction de l'exercice 5 - La racine d'un trinôme

a) Le trinôme $x^2 + 2x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: il est **toujours strictement positif** (du signe de $a = 1$). La racine est donc définie **et dérivable** sur $\mathbb{R}$ (la racine carrée n'est pas dérivable en 0, mais le trinôme ne s'annule jamais).

b) Avec $u(x) = x^2 + 2x + 5$ et $u'(x) = 2x + 2$:

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad f(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

- Le dénominateur est positif : $f(x)$ a le signe de $x + 1$.
- f est **décroissante** sur $] -\infty ; -1]$ et **croissante** sur $[-1 ; +\infty[$.
- **Minimum** : $f(-1) = \frac{\sqrt{1-2+5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 2$.
- **Remarque** : $\sqrt{u}$ a les **mêmes variations** que u (la racine est croissante) ; le trinôme a bien son minimum en -1 .

Réponse. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; minimum 2 en $x = -1$.

Correction de l'exercice 6 - Trois exponentielles composées

On applique

$$(e^u)' = u' e^u$$

a) $u(x) = -x^2$, $u'(x) = -2x$: $f(x) = -2x e^{-x^2}$.

b) $u(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$: $g(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}$.

c) $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: $h(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

Signes (une exponentielle est toujours strictement positive) :

- $f(x)$ a le signe de $-x$: f croît puis décroît, maximum $f(0) = 1$ (la « courbe en cloche ») ;
- $g'(x) < 0$: g est décroissante ;
- $h'(x) > 0$: h est croissante.
- **Point à retenir** : e^u a toujours le **même sens de variation** que u .

Réponse. a) $-2x e^{-x^2}$ · b) $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$ · c) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

Correction de l'exercice 7 - Produit et composée

a) $f = uv$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, et $v(x) = e^{-2x}$, $v'(x) = -2e^{-2x}$ (composée avec une fonction affine).

$$f(x) = u'v + uv' = e^{-2x} + x \times (-2e^{-2x}) = (1 - 2x)e^{-2x}$$

b) $e^{-2x} > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $1 - 2x$, positif pour $x < \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f		croissante	$\frac{1}{2e}$	décroissante	

— **Maximum** : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} \approx 0,184$.

— **Réflexe** : factoriser par l'exponentielle, qui est toujours positive, pour lire le signe.

Réponse. $f(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$; maximum $\frac{1}{2e}$ en $x = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 - Quotient et composée

a) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^{2x}$, $u'(x) = 2e^{2x}$, et $v(x) = x + 1$, $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2e^{2x}(x+1) - e^{2x}}{(x+1)^2} = \frac{e^{2x}(2x+2-1)}{(x+1)^2} = \frac{(2x+1)e^{2x}}{(x+1)^2}$$

b) Sur $] -1 ; +\infty[$, $e^{2x} > 0$ et $(x+1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2x+1$.

— f est **décroissante** sur $] -1 ; -\frac{1}{2}]$;

— f est **croissante** sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$;

— minimum $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-1}}{1/2} = \frac{2}{e} \approx 0,736$.

— **Méthode** : on met e^{2x} en facteur au numérateur **avant** de conclure.

Réponse. Décroissante sur $] -1 ; -\frac{1}{2}]$, croissante ensuite ; minimum $\frac{2}{e}$.

Correction de l'exercice 9 - Tangente à une courbe racine

a) Avec $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$:

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

b) **Équation de la tangente** en $a = 4$: $y = f(a)(x-a) + f(a)$.

— $f(4) = \sqrt{9} = 3$;

— $f'(4) = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$.

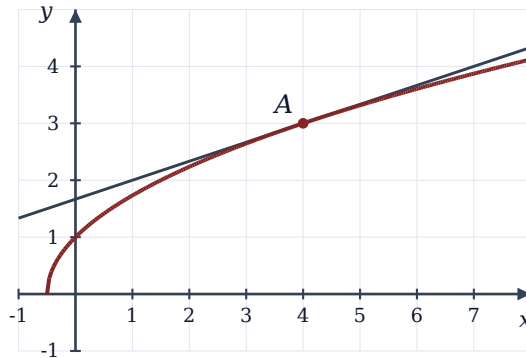
$$T: y = \frac{1}{3}(x-4) + 3 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

— **Tracé** : T passe par $A(4; 3)$ et par $\left(-1; \frac{4}{3}\right)$ (car $-\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$).

— **Contrôle** : en $x = 4$, $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3 \checkmark$; la pente $\frac{1}{3}$ est bien celle de la courbe en A.

— La courbe est **sous** sa tangente : elle « s'aplatit » (fonction concave).

Réponse. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $T: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.



Tangente T en A(4 ; 3) : $y = x/3 + 5/3$

Correction de l'exercice 10 - Variations d'une exponentielle de trinôme

a) Avec $u(x) = x^2 - 4x$, $u'(x) = 2x - 4$:

$$f(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x - 4)e^{x^2 - 4x}$$

b) L'exponentielle est strictement positive : $f(x)$ a le signe de $2x - 4$.

— f est **décroissante** sur $] -\infty ; 2]$ et **croissante** sur $[2 ; +\infty[$.

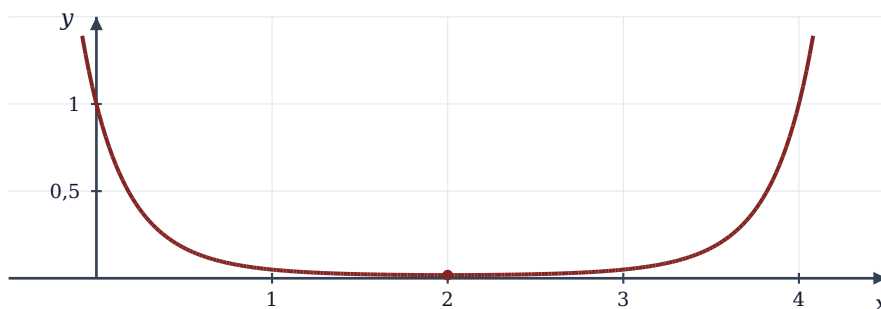
— **Minimum** : $f(2) = e^{4-8} = e^{-4} \approx 0,018$.

c) $e^{x^2 - 4x} = 1 = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$ (l'exponentielle est strictement croissante, donc **injective**).

— Solutions : $x = 0$ ou $x = 4$.

— **Remarque** : f et u ont les mêmes variations — le minimum de la parabole $x^2 - 4x$ est aussi en $x = 2$.

Réponse. $f(x) = (2x - 4)e^{x^2 - 4x}$; minimum e^{-4} en 2 ; $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{0 ; 4\}$.



Courbe de f : minimum e^{-4} en $x = 2$, $f(0) = f(4) = 1$

Correction de l'exercice 11 - Un cosinus composé

a) Avec $u(x) = 2x + \frac{\pi}{3}$, $u'(x) = 2$:

$$(\cos u)' = -u' \sin u \quad f(x) = -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

b) **Valeurs** :

- $f(0) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;
- $f'(0) = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.

Tangente : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit

$$y = -\sqrt{3}x + \frac{1}{2}$$

- **Piège** : le facteur 2 vient de u' ; sans lui, on trouverait une pente de $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, deux fois trop faible.
- **Interprétation** : f oscille deux fois plus vite que $\cos x$; ses pentes sont donc deux fois plus fortes.

Réponse. $f(x) = -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; tangente $y = -\sqrt{3}x + \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Charge d'un condensateur

a) La dérivée de e^{-2t} est $-2e^{-2t}$ (composée avec $u(t) = -2t$) :

$$i(t) = q'(t) = 2 \times \left(0 - (-2e^{-2t})\right) = 4e^{-2t}$$

— $i(0) = 4e^0 = 4$ mA : le courant est **maximal** au démarrage.

b) $i(t) = q'(t) > 0$: la charge est **strictement croissante**.

— En $+\infty$, $e^{-2t} \rightarrow 0$, donc $q(t) \rightarrow 2$ mC.

Interprétation : le condensateur se charge de plus en plus lentement (l'intensité $4e^{-2t}$ décroît vers 0) et tend vers sa charge maximale de 2 mC.

— **Ordre de grandeur** : $q(2) = 2(1 - e^{-4}) \approx 1,96$ mC, soit 98 % de la charge finale en 2 s.

Réponse. $i(t) = 4e^{-2t}$, $i(0) = 4$ mA ; q croît vers 2 mC.

Correction de l'exercice 13 - Corriger deux erreurs

L'erreur commune est l'**oubli du facteur** u' , la dérivée de la fonction intérieure. La formule complète est :

$$[g(u(x))]' = u'(x) \times g'(u(x))$$

— **Première dérivée** : $u(x) = 3x + 1$, $u'(x) = 3$, d'où

$$\left[(3x + 1)^4\right]' = 3 \times 4(3x + 1)^3 = 12(3x + 1)^3$$

— **Seconde dérivée** : $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, d'où $\left[e^{x^2}\right]' = 2xe^{x^2}$.

Vérification de la première en $x = 0$ par un taux d'accroissement : $\frac{(1,003)^4 - 1}{0,001} \approx 12,05$, proche de 12 et non de 4 ✓

— **Conseil** : écrire systématiquement u et u' **à part**, sur une ligne, avant d'appliquer la formule.

Réponse. $12(3x + 1)^3$ et $2xe^{x^2}$: le facteur u' manquait.

Correction de l'exercice 14 - Racine d'une exponentielle

a) Deux compositions s'emboîtent. On pose $u(x) = 1 + e^{2x}$ (strictement positif), avec

$$u'(x) = 2e^{2x}$$

(la dérivée de e^{2x} est $2e^{2x}$). Puis, avec $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$f(x) = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

- Numérateur et dénominateur sont strictement positifs : $f(x) > 0$, f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- b) En $-\infty$, $e^{2x} \rightarrow 0$, donc $1 + e^{2x} \rightarrow 1$ et, par composition, $f(x) \rightarrow \sqrt{1} = 1$.
- La droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $-\infty$; et $f(x) > 1$ pour tout x .
- **Méthode** : on dérive **de l'extérieur vers l'intérieur**, en multipliant les dérivées successives.

Réponse. $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} > 0$; $\lim_{-\infty} f = 1$.

Correction de l'exercice 15 - Composée donnée par des valeurs

On applique la formule de dérivation d'une composée **en un point** :

$$(g \circ u)'(a) = u'(a) \times g'(u(a))$$

a) $u(1) = 2$, donc

$$(g \circ u)'(1) = u'(1) \times g'(2) = 3 \times (-1) = -3$$

- **Piège** : il faut g' évalué en $u(1) = 2$, **pas** en 1. Écrire $3 \times g'(1) = 12$ serait faux.
- b) Ici la fonction intérieure est $x \mapsto x^2$, de dérivée $2x$:
- $f(x) = 2x g'(x^2)$;
- $f(1) = 2 \times 1 \times g'(1) = 2 \times 4 = 8$.
- **Conséquence** : si g est croissante ($g' > 0$), alors $f(x) = g(x^2)$ a le signe de $2x$ pour dérivée : f décroît sur $] -\infty ; 0]$ et croît sur $[0 ; +\infty[$.

Réponse. a) -3 · b) $f(x) = 2x g'(x^2)$, $f(1) = 8$.