

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : optimisation, convexité et tangentes

Compléments sur la dérivation — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules de dérivation.

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$$

Composées usuelles (les plus demandées) :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (e^u)' = u'e^u \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\sin u)' = u' \cos u \quad (\cos u)' = -u' \sin u$$

Tangente au point d'abscisse a :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Variations et extremums.

- $f' > 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ **strictement croissante** ; $f' < 0 \Rightarrow$ décroissante.
- Un extremum **local intérieur** implique $f' = 0$ — mais la réciproque est **fausse** (x^3 en 0). Il faut le **changement de signe** de f' .

Convexité.

- $f'' \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ **convexe** sur I (courbe **au-dessus** de ses tangentes).
- $f'' \leq 0 \Leftrightarrow$ **concave** (courbe **sous** ses tangentes).
- **Point d'inflexion** : point où f'' **change de signe** — la courbe y traverse sa tangente.

Méthode d'optimisation (à suivre dans cet ordre) :

1. nommer les variables et écrire la **contrainte** ; 2. exprimer la quantité à optimiser en **une seule** variable, en précisant l'**intervalle** ; 3. dériver, étudier le signe, dresser le tableau ; 4. conclure et **vérifier la vraisemblance** du résultat.

Correction de l'exercice 1 - Dérivées de composées

a) Forme $nu'u^{n-1}$ avec $u = 2x^2 - 3$, $u' = 4x$:

$$f(x) = 4 \times 4x \times (2x^2 - 3)^3 = 16x(2x^2 - 3)^3$$

b) Forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$:

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

c) Forme $u'e^u$ avec $u = -3x^2$, $u' = -6x$:

$$h'(x) = -6xe^{-3x^2}$$

- **Contrôles de signe** : g' a le signe de x , cohérent avec g minimale en 0 ✓ ; h' a le signe de $-x$, cohérent avec h **maximale** en 0 (où $h = 1$) ✓

- **Méthode** : identifier la fonction **extérieure** et la fonction **intérieure**, puis appliquer $u' \times (g' \circ u)$ — on dérive « de l'extérieur vers l'intérieur » en multipliant par la dérivée intérieure.

Réponse. a) $16x(2x^2 - 3)^3$ · b) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ · c) $-6xe^{-3x^2}$.

Correction de l'exercice 2 - Dérivée d'un quotient

- **Formule du quotient** avec $u = x^2 + 1$ et $v = x - 2$:

$$f(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$$

- **Signe** : le dénominateur est **strictement positif**, donc f a le signe du trinôme $x^2 - 4x - 1$.
- **Racines** : $\Delta = 16 + 4 = 20$, donc $x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$.
- Numériquement, $2 - \sqrt{5} \approx -0,236$ et $2 + \sqrt{5} \approx 4,236$.
- **Variations** : f **croît** sur $] -\infty ; 2 - \sqrt{5}]$, **décroît** sur $[2 - \sqrt{5} ; 2 + \sqrt{5}]$, **croît** ensuite.
- **Extremums locaux** : $f(2 - \sqrt{5}) \approx -0,472$ (maximum local) et $f(2 + \sqrt{5}) \approx 8,472$ (minimum local).
- **Contrôle** : $f(0) = \frac{-1}{4} < 0$ ✓ (on est bien entre les deux racines).

Réponse. $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$, du signe de $x^2 - 4x - 1$.

Correction de l'exercice 3 - Équation de tangente

- **Valeur et dérivée** : $f(2) = 8 - 4 + 1 = 5$; $f'(x) = 3x^2 - 2$, donc $f'(2) = 10$.
- **Tangente** :
- $$y = 5 + 10(x - 2) = 10x - 15$$
- **Contrôle** : en $x = 2$, la tangente donne $5 = f(2)$ ✓
- **Tangentes horizontales** : on résout $f'(x) = 0$, soit $3x^2 = 2$, donc $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.
- Numériquement, $x \approx \pm 0,8165$.
- **Ordonnées** : $f(0,8165) \approx -0,0887$ (minimum local) et $f(-0,8165) \approx 2,0887$ (maximum local).
- **Vérification de cohérence** : le maximum local (2,09) est bien **supérieur** au minimum local (-0,09), et la fonction est croissante-décroissante-croissante ✓

Réponse. $y = 10x - 15$; tangentes horizontales en $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Correction de l'exercice 4 - Tangente passant par un point donné

- **Tangente au point d'abscisse a** : $f(a) = a^2$ et $f'(a) = 2a$, donc
- $$y = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$$
- **Condition de passage par A** : on impose $-1 = 2a \times 0 - a^2$, soit $-1 = -a^2$.
- Donc $a^2 = 1$ et $a = \pm 1$.
- **Deux tangentes** :

- pour $a = 1$: $y = 2x - 1$;
- pour $a = -1$: $y = -2x - 1$.
- **Vérifications** : les deux droites passent bien par $(0; -1)$ ✓ ; et $y = 2x - 1$ touche la parabole en $(1; 1)$, car $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ a une **racine double** ✓
- **Piège classique** : A n'est **pas** sur la courbe ($f(0) = 0 \neq -1$). Il ne faut donc **pas** calculer « la tangente en A » mais chercher le **point de contact** a , qui est l'inconnue.

Réponse. $y = 2x - 1$ (contact en 1) et $y = -2x - 1$ (contact en -1).

Correction de l'exercice 5 - Tableau de variations complet

- **Dérivée** (quotient) :

$$f(x) = \frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$$

- **Signe** : $e^x > 0$ et $x^2 > 0$, donc f a le signe de $x - 1$.
- **Variations** : f **décroît** sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$, **croît** sur $]1; +\infty[$.
- **Minimum local** en $x = 1$: $f(1) = e \approx 2,718$.
- **Limites** :
 - en $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0^-$, donc $f \rightarrow 0^-$;
 - en 0^- : $e^x \rightarrow 1$ et $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, donc $f \rightarrow -\infty$;
 - en 0^+ : $f \rightarrow +\infty$;
 - en $+\infty$: croissances comparées, $f \rightarrow +\infty$.
- **Asymptotes** : $x = 0$ (verticale) et $y = 0$ (horizontale en $-\infty$).
- **Contrôles** : $f(-1) = -e^{-1} \approx -0,368$ ✓ ; $f(2) = \frac{e^2}{2} \approx 3,695 > e$ ✓

Réponse. Minimum local e en $x = 1$; asymptotes $x = 0$ et $y = 0$ (en $-\infty$).

Correction de l'exercice 6 - Convexité et inflexion

- **Dérivées successives** : $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ et $f'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.
- **Signe de f'** : négatif pour $x < 1$, positif pour $x > 1$.
- **Convexité** : f est **concave** sur $] -\infty; 1[$ et **convexe** sur $]1; +\infty[$.
- **Point d'inflexion** : en $x = 1$, où f' **change de signe**.
- **Ordonnée** : $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, donc le point est $I(1; 0)$.
- **Tangente en I** : $f'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$, donc $y = -(x - 1) = -x + 1$.
- **Traversée** : la courbe passe **sous** sa tangente avant 1 et **au-dessus** après — c'est la signature de l'inflexion.
- **Contrôles** : $f''(0) = -6 < 0$ ✓ (concave) et $f''(2) = 6 > 0$ ✓ (convexe).
- **Ne pas confondre** : les racines de f ($x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, extremums) et celle de f' ($x = 1$, inflexion).

Réponse. Concave sur $] -\infty; 1[$, convexe ensuite ; inflexion en $I(1; 0)$.

Correction de l'exercice 7 - Convexité et exponentielle

- **Dérivée première** : $f(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$.
- **Dérivée seconde** : $f'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$.
- **Signe** : $e^x > 0$, donc f' a le signe de $1 + x$.
- **Convexité** : **concave** sur $] -\infty; -1[$, **convexe** sur $] -1; +\infty[$.
- **Point d'inflexion** en $x = -1$, d'ordonnée $f(-1) = -2e^{-1} \approx -0,736$.

- **Extremum** : $f(x) = xe^x$ s'annule en $x = 0$, où $f(0) = -1$ — c'est le **minimum global**.
- **Contrôles** : $f(1) = 0$ ✓ ; $f(-2) = -3e^{-2} \approx -0,406$ ✓ ; $f'(-2) = -e^{-2} < 0$ ✓
- **Distinction essentielle** : $x = 0$ est un **extremum** ($f' = 0$), $x = -1$ une **inflexion** ($f'' = 0$) — deux points différents, souvent confondus.

Réponse. Concave avant -1 , convexe après ; inflexion en $(-1 ; -2e^{-1})$.

Correction de l'exercice 8 - Optimisation : aire maximale

Notons x la longueur des deux côtés perpendiculaires au mur et y le côté parallèle.

- **Contrainte** : $2x + y = 40$, donc $y = 40 - 2x$ avec $x \in]0 ; 20[$.
- **Aire à maximiser** :

$$A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$$

- **Dérivée** : $A'(x) = 40 - 4x$, nulle en $x = 10$, **positive** avant, **négative** après.
- **Maximum** en $x = 10$ m, avec $y = 40 - 20 = 20$ m.
- **Aire maximale** : $A(10) = 200$ m².
- **Contrôles** : $A(8) = 8 \times 24 = 192$ ✓ ; $A(12) = 12 \times 16 = 192$ ✓ — bien inférieures à 200.
- **Remarque** : l'enclos optimal est **deux fois plus long que large** — le mur « gratuit » déforme l'optimum, qui serait un carré sans lui.
- **Vérification de la contrainte** : $2 \times 10 + 20 = 40$ m de grillage ✓

Réponse. 10 m $\times$ 20 m, pour une aire de 200 m².

Correction de l'exercice 9 - Optimisation : volume d'une boîte

- **Dimensions de la boîte** : base carrée de côté $30 - 2x$, hauteur x , avec $x \in]0 ; 15[$.
- **Volume** :

$$V(x) = x(30 - 2x)^2$$

- **Dérivée** (produit) :

$$V'(x) = (30 - 2x)^2 + x \times 2(30 - 2x) \times (-2) = (30 - 2x)[(30 - 2x) - 4x] = (30 - 2x)(30 - 6x)$$
- **Signe** : sur $]0 ; 15[$, $30 - 2x > 0$; donc V' a le signe de $30 - 6x$, **positif** pour $x < 5$ et négatif après.
- **Maximum** en $x = 5$ cm.
- **Volume maximal** : $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$ cm³ = 2 litres.
- **Contrôles** : $V(3) = 3 \times 576 = 1\,728$ ✓ ; $V(7) = 7 \times 256 = 1\,792$ ✓ — tous deux inférieurs à 2 000.
- **Vérification de vraisemblance** : la boîte mesure $20 \times 20 \times 5$ cm, ce qui est bien 2 000 cm³ ✓

Réponse. $x = 5$ cm, pour un volume de 2 000 cm³.

Correction de l'exercice 10 - Optimisation : coût minimal

- **Coût moyen** :

$$M(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 6q + 15 + \frac{20}{q}$$

- **Dérivée** :

$$M'(q) = 2q - 6 - \frac{20}{q^2} = \frac{2q^3 - 6q^2 - 20}{q^2}$$

- **Racines du numérateur** : $2q^3 - 6q^2 - 20 = 2(q^3 - 3q^2 - 10)$. On teste $q = 4$:
 $64 - 48 - 10 = 6 > 0$; $q = 3,9$: $59,32 - 45,63 - 10 = 3,69 > 0$; $q = 3,7$:
 $50,65 - 41,07 - 10 = -0,42 < 0$.
 - La racine est donc entre 3,7 et 3,8 ; par dichotomie, $q_0 \approx 3,7219$.
 - **Signe** : M' est **négative** avant q_0 et positive après — M atteint son **minimum** en q_0 .
 - **Coût moyen minimal** : $M(3,7219) \approx 13,853 - 22,331 + 15 + 5,374 \approx 11,89$ milliers d'euros par centaine de pièces.
 - **Contrôles** : $M(3) = 9 - 18 + 15 + 6,667 = 12,667 \checkmark$; $M(4) = 16 - 24 + 15 + 5 = 12 \checkmark$ — tous deux au-dessus de 11,89.
 - **Lecture économique** : produire environ **372 pièces** minimise le coût unitaire.
- Réponse.** $q \approx 3,72$ centaines de pièces, pour un coût moyen de $\approx 11,89$ k€.

Correction de l'exercice 11 - Optimisation : distance minimale

- **Distance au carré** (on minimise le carré, c'est équivalent et plus simple) :

$$d(x) = (x - 3)^2 + (x^2)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9$$

- **Dérivée** :

$$d'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(2x^3 + x - 3)$$

- **Racine évidente** : $x = 1$ donne $2 + 1 - 3 = 0 \checkmark$
- **Factorisation** : $2x^3 + x - 3 = (x - 1)(2x^2 + 2x + 3)$, et le trinôme a un discriminant $4 - 24 = -20 < 0$ — **aucune autre racine réelle**.
- **Signe** : $2x^2 + 2x + 3 > 0$ toujours, donc d' a le signe de $x - 1$: d **décroît** puis **croît**.
- **Minimum** en $x = 1$, soit le point $M(1 ; 1)$.
- **Distance** : $\sqrt{(1 - 3)^2 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,236$.
- **Contrôles** : le point $(0 ; 0)$ est à distance 3 $\checkmark$; $(2 ; 4)$ est à distance $\sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \approx 4,12 \checkmark$ — tous deux plus loin.
- **Contrôle géométrique** : $\overrightarrow{AM} = (-2 ; 1)$ doit être **orthogonal** à la tangente en M , de vecteur directeur $(1 ; f'(1)) = (1 ; 2)$: $-2 + 2 = 0 \checkmark$

Réponse. Le point $M(1 ; 1)$, à distance $\sqrt{5} \approx 2,24$.

Correction de l'exercice 12 - Position par rapport à une tangente

- **Tangente en 0** : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$, donc $T: y = x + 1$.
- **Étude de la différence** : posons $g(x) = e^x - x - 1$.
- $g'(x) = e^x - 1$, **négative** pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$.
- g atteint donc son **minimum** en $x = 0$, où $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
- **Conclusion** : $g(x) \geq 0$ pour tout réel, c'est-à-dire

$$e^x \geq x + 1$$
- La courbe est **au-dessus** de sa tangente, avec **égalité uniquement** en $x = 0$.
- **Lien avec la convexité** : $f' = e^x > 0$, donc $\exp$ est **convexe** — et une fonction convexe est toujours au-dessus de ses tangentes $\checkmark$
- **Contrôles** : $e^{-1} = 0,368 \geq 0 \checkmark$; $e^2 = 7,389 \geq 3 \checkmark$
- **Importance** : c'est l'inégalité la plus utilisée du chapitre (majorations, limites, convergences).

Réponse. $e^x \geq x + 1$, avec égalité seulement en 0.

Correction de l'exercice 13 - Dérivée et nombre de solutions

- **Dérivée** : $f(x) = (1+x)e^x$, du signe de $1+x$.
- **Variations** : f **décroît** sur $] -\infty ; -1]$, **croît** sur $[-1 ; +\infty[$.
- **Minimum** : $f(-1) = -e^{-1} \approx -0,368$.
- **Limites** : en $-\infty$, $xe^x \rightarrow 0^-$ (croissances comparées) ; en $+\infty$, $f \rightarrow +\infty$.
- **Discussion pour $f(x) = 1$** :
 - sur $] -\infty ; -1]$, f décrit $]0^- ; -0,368]$ — donc $f < 0 < 1$, **aucune** solution ;
 - sur $[-1 ; +\infty[$, f croît de $-0,368$ à $+\infty$ — **une unique** solution.
- **Conclusion** : **une seule** solution.
- **Encadrement** : $f(0,56) \approx 0,980$ et $f(0,57) \approx 1,008$, donc $\alpha \in]0,56 ; 0,57[$, soit $\alpha \approx 0,5671$.
- **Contrôle** : $0,5671 \times e^{0,5671} \approx 0,5671 \times 1,7632 \approx 1,000 \checkmark$

Réponse. Une seule solution, $\alpha \approx 0,567$.

Correction de l'exercice 14 - Dérivée d'une fonction trigonométrique

- **Dérivée** : $f(x) = \cos x - \sin x$.
- **Annulation** : $\cos x = \sin x$, soit $\tan x = 1$ (pour $\cos x \neq 0$), donc $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$ sur $[0 ; 2\pi]$.
- **Signe** : $f(x) > 0$ quand $\cos x > \sin x$, c'est-à-dire sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right[$ et $\left]\frac{5\pi}{4} ; 2\pi\right]$.
- **Maximum** en $x = \frac{\pi}{4}$: $f = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1,414$.
- **Minimum** en $x = \frac{5\pi}{4}$: $f = -\sqrt{2} \approx -1,414$.
- **Forme condensée** : $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ — l'amplitude $\sqrt{2}$ confirme directement les extremums $\checkmark$
- **Contrôles aux bornes** : $f(0) = 1$ et $f(2\pi) = 1$, tous deux entre $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ $\checkmark$
- **Technique à retenir** : $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ — l'amplitude donne immédiatement le maximum.

Réponse. Maximum $\sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{4}$; minimum $-\sqrt{2}$ en $\frac{5\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète type bac

- a) **Dérivée** : $f(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$.
- f a le signe de $1-x$: f **croît** sur $] -\infty ; 1]$, **décroît** sur $[1 ; +\infty[$.
 - **Maximum** en $x = 1$: $f(1) = e \approx 2,718$.
 - **Limites** : en $-\infty$, $(2-x) \rightarrow +\infty$ mais $e^x \rightarrow 0$ — les croissances comparées donnent $f \rightarrow 0^+$; en $+\infty$, $f \rightarrow -\infty$.
 - **Asymptote** : $y = 0$ en $-\infty$.
- b) **Dérivée seconde** : $f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$.
- f' a le signe de $-x$: f est **convexe** sur $] -\infty ; 0]$, **concave** sur $[0 ; +\infty[$.
 - **Point d'inflexion** en $x = 0$, d'ordonnée $f(0) = 2$.
- c) **Tangente en 0** : $f(0) = 1$, donc $T: y = x + 2$.
- **Position** : puisque $x = 0$ est un point d'**inflexion**, la courbe **traverse** sa tangente — elle est au-dessus pour $x < 0$ (partie convexe) et en dessous pour $x > 0$.

- **Contrôles** : $f(-1) = 3e^{-1} \approx 1,104$, contre 1 pour la tangente — la courbe est bien **au-dessus** ✓ ; $f(1) = 2,718$ contre 3 — bien **en dessous** ✓
- **Zéro de la fonction** : $f(x) = 0$ pour $x = 2$, la courbe coupant l'axe des abscisses en $(2; 0)$.

Réponse. a) max e en 1 · b) inflexion en $(0; 2)$ · c) $T: y = x + 2$, traversée en 0.