

Plaquette 1 - Dérivée d'une fonction composée

Compléments sur la dérivation — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Avant de dériver, on **repère la structure** : quelle est la fonction « intérieure » u , quelle est la fonction « extérieure » ? On écrit u et u' à part, puis on applique la formule adaptée (u^n , $\sqrt{u}$, e^u ...) **sans oublier le facteur u'** . On simplifie et on factorise ensuite, pour étudier le signe.

Exercice 1 - Repérer la structure

Pour chaque fonction, écrire $h = g \circ u$ en précisant u et g :

a) $h_1(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$

b) $h_2(x) = e^{-x^2}$

c) $h_3(x) = (2x - 5)^4$

d) $h_4(x) = \cos(3x)$

Exercice 2 - Une fonction affine à l'intérieur

Dériver :

a) $f(x) = e^{3x-2}$

b) $g(x) = \sqrt{4x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

c) $h(x) = (2-5x)^3$

Exercice 3 - Puissances d'un polynôme

Dériver, puis factoriser au maximum :

a) $f(x) = (x^2 + 1)^3$

b) $g(x) = (1 - x^3)^4$

Exercice 4 - Une puissance négative

Soit $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $f'(x)$ en écrivant $f(x) = (x^2 + 1)^{-2}$.

b) Retrouver le résultat avec la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

c) En déduire les variations de f .

Exercice 5 - La racine d'un trinôme

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$.

- Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .

Exercice 6 - Trois exponentielles composées

Dériver :

- $f(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$
- $g(x) = e^{1/x}$ sur $]0; +\infty[$
- $h(x) = e^{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 7 - Produit et composée

Soit $f(x) = x e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Dresser le tableau de variations de f (sans les limites) et donner son maximum.

Exercice 8 - Quotient et composée

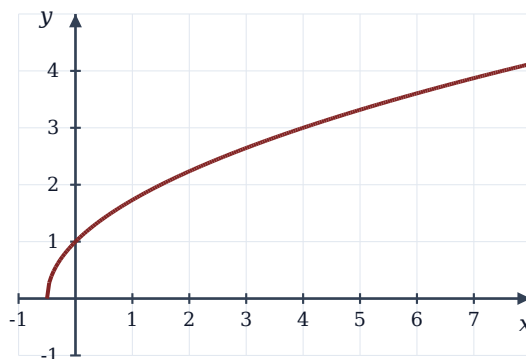
Soit $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+1}$ sur $] -1; +\infty[$.

- Montrer que $f'(x) = \frac{(2x+1)e^{2x}}{(x+1)^2}$.
- En déduire les variations de f sur $] -1; +\infty[$.

Exercice 9 - Tangente à une courbe racine

Soit $f(x) = \sqrt{2x+1}$ sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, dont la courbe est tracée ci-dessous.

- Calculer $f'(x)$ pour $x > -\frac{1}{2}$.
- Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 4, puis la tracer.



Courbe de f

Exercice 10 - Variations d'une exponentielle de trinôme

Soit $f(x) = e^{x^2 - 4x}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier les variations de f et préciser son minimum.
- Résoudre $f(x) = 1$.

Exercice 11 - Un cosinus composé

Soit $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

- Calculer $f'(x)$.
- Calculer $f(0)$ et $f'(0)$, puis donner l'équation de la tangente en 0.

Exercice 12 - Charge d'un condensateur

Lors de la charge d'un condensateur, la charge (en mC) vaut $q(t) = 2(1 - e^{-2t})$, t en secondes. L'intensité du courant est $i(t) = q'(t)$ (en mA).

- Calculer $i(t)$, puis $i(0)$.
- Étudier le sens de variation de q et sa limite en $+\infty$. Interpréter.

Exercice 13 - Corriger deux erreurs

Un élève a écrit :

- $\left[(3x + 1)^4\right]' = 4(3x + 1)^3$;
- $\left[e^{x^2}\right]' = e^{x^2}$.

Identifier l'erreur commune, puis donner les dérivées correctes.

Exercice 14 - Racine d'une exponentielle

Soit $f(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
- Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Exercice 15 - Composée donnée par des valeurs

Les fonctions g et u sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'on connaît :

x	1	2
$u(x)$	2	5
$u'(x)$	3	-1
$g'(x)$	4	-1

- Calculer $(g \circ u)'(1)$.
- Soit $f(x) = g(x^2)$. Exprimer $f'(x)$ et calculer $f'(1)$.