

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse :
optimisation, convexité et tangentes
Compléments sur la dérivation — Terminale spé maths
Exercices

Méthode

On dérive des composées et des quotients, on dresse un **tableau de variations** complet, on étudie la **convexité** par f'' , et on résout des problèmes d'**optimisation** concrets (aire, volume, coût).

Exercice 1 - Dérivées de composées

Dériver :

a) $f(x) = (2x^2 - 3)^4$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $h(x) = e^{-3x^2}$

Exercice 2 - Dérivée d'un quotient

Dériver $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et déterminer le signe de f' .

Exercice 3 - Équation de tangente

Soit $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2, puis les points où la tangente est **horizontale**.

Exercice 4 - Tangente passant par un point donné

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer les tangentes à la parabole passant par le point $A(0 ; -1)$.

Exercice 5 - Tableau de variations complet

Étudier $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$: variations, extremum, limites.

Exercice 6 - Convexité et inflexion

Étudier la convexité de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ et déterminer son point d'inflexion.

Exercice 7 - Convexité et exponentielle

Soit $f(x) = (x - 1)e^x$. Étudier sa convexité et déterminer le point d'inflexion.

Exercice 8 - Optimisation : aire maximale

On dispose de 40 m de grillage pour clôturer un enclos **rectangulaire** adossé à un mur (le mur remplace un côté). Quelles dimensions maximisent l'aire ?

Exercice 9 - Optimisation : volume d'une boîte

Dans un carton carré de côté 30 cm, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x , puis on replie pour former une boîte **sans couvercle**. Déterminer x maximisant le volume.

Exercice 10 - Optimisation : coût minimal

Le coût de production de q pièces (en centaines) est $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 20$ (en milliers d'euros), pour $q \in]0 ; 6]$. Déterminer la production minimisant le **coût moyen** $\frac{C(q)}{q}$.

Exercice 11 - Optimisation : distance minimale

Déterminer le point de la parabole $y = x^2$ le plus proche du point $A(3 ; 0)$.

Exercice 12 - Position par rapport à une tangente

Soit $f(x) = e^x$. Montrer que la courbe est **au-dessus** de sa tangente en 0, et en déduire une inégalité classique.

Exercice 13 - Dérivée et nombre de solutions

Déterminer le nombre de solutions de $xe^x = 1$ en étudiant $f(x) = xe^x$.

Exercice 14 - Dérivée d'une fonction trigonométrique

Soit $f(x) = \sin x + \cos x$ sur $[0 ; 2\pi]$. Déterminer ses extremums.

Exercice 15 - Synthèse : étude complète type bac

Soit $f(x) = (2 - x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

- Étudier les variations et les limites.
- Étudier la convexité et donner le point d'inflexion.
- Déterminer la tangente en 0 et la position de la courbe.