

Plaquette 1 - Espérance, variance, écart à la moyenne

Concentration, loi des grands nombres — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espérance, variance, écart-type :

$$\mu = E(X) = \sum_i p_i x_i \quad V(X) = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Écart à la moyenne : pour $\delta > 0$,

$$\{|X - \mu| \geq \delta\} = \{X \leq \mu - \delta\} \cup \{X \geq \mu + \delta\}$$

et son contraire est $\{\mu - \delta < X < \mu + \delta\}$.

Transformations : $|(aX + b) - (a\mu + b)| = |a| |X - \mu|$.

Sommes et moyennes de n variables indépendantes de même loi : $E(S_n) = n\mu$, $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$; $E(M_n) = \mu$, $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Loi binomiale $B(n; p)$: $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Repère empirique : pour beaucoup de lois « en cloche », environ 95 % des valeurs sont dans $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$.

Correction de l'exercice 1 - Calculer un écart à la moyenne

a) La loi est symétrique autour de 2 : $\mu = 2$. Puis

$$V(X) = 0,1 \times 4 + 0,2 \times 1 + 0,4 \times 0 + 0,2 \times 1 + 0,1 \times 4 = 1,2 \quad \sigma = \sqrt{1,2} \approx 1,095$$

b) $|X - 2| \geq 1,095$ équivaut à $X \leq 0,905$ ou $X \geq 3,095$, c'est-à-dire $X = 0$ ou $X = 4$ (valeurs entières).

$$- P(|X - 2| \geq \sigma) = 0,1 + 0,1 = 0,2.$$

— **Méthode** : on traduit la valeur absolue en **deux** inégalités, puis on cherche quelles valeurs de X les vérifient.

Réponse. a) $\mu = 2$, $V = 1,2$, $\sigma \approx 1,095$ · b) 0,2.

Correction de l'exercice 2 - L'intervalle à deux écarts-types

a) $X \sim B(100; 0,5)$:

$$\mu = 100 \times 0,5 = 50 \quad \sigma = \sqrt{100 \times 0,5 \times 0,5} = 5$$

b) $[50 - 10; 50 + 10] = [40; 60]$.

c) Dans environ 96,5 % des séries de 100 lancers, le nombre de « pile » est compris entre 40 et 60.

— **Interprétation** : obtenir 65 « pile » serait donc un résultat rare, qui pourrait faire douter de l'équilibre de la pièce.

— **Remarque** : on retrouve l'ordre de grandeur « 95 % à deux écarts-types » des lois en cloche.

Réponse. a) $\mu = 50$, $\sigma = 5$ · b) $[40; 60]$ · c) $\approx 96,5$ % des séries.

Correction de l'exercice 3 - Écart au centre pour un dé

a) On traduit l'événement :

$$|X - 3,5| \geq 2 \Leftrightarrow X \leq 1,5 \text{ ou } X \geq 5,5 \Leftrightarrow X \in \{1; 6\}$$

$$- P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,333.$$

$$b) \frac{V}{\sigma^2} = \frac{35/12}{4} = \frac{35}{48} \approx 0,729.$$

— **Comparaison** : $0,333 \leq 0,729$. Ce quotient **major**e la probabilité d'écart : c'est l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, que l'on étudiera. On voit ici qu'elle est vraie, mais assez grossière.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) $\frac{35}{48} \approx 0,729$, qui majore la probabilité.

Correction de l'exercice 4 - Mesurer un écart en écarts-types

a) On calcule $\frac{x - \mu}{\sigma}$:

$$\frac{17 - 11}{3} = 2 \quad \frac{8 - 11}{3} = -1 \quad \frac{12,5 - 11}{3} = 0,5$$

— 17 est à 2 écarts-types **au-dessus**, 8 à 1 écart-type **en dessous**, 12,5 à un demi-écart-type au-dessus.

b) « Au moins deux écarts-types » :

$$- |N - 11| \geq 6, \text{ soit } N \leq 5 \text{ ou } N \geq 17.$$

— **Intérêt** : exprimer un écart « en nombre d'écarts-types » permet de comparer des situations d'échelles différentes.

Réponse. a) +2 ; -1 ; +0,5 · b) $N \leq 5$ ou $N \geq 17$.

Correction de l'exercice 5 - Deux machines, deux dispersions

a) Écart toléré $\delta = 0,5$ mm :

$$\text{machine A: } \frac{0,5}{0,1} = 5\sigma \quad \text{machine B: } \frac{0,5}{0,3} \approx 1,67\sigma$$

b) Pour la machine A, une vis rejetée devrait s'écarter de **cinq** écarts-types de la moyenne : c'est extrêmement rare. Pour B, un écart de 1,67 écart-type est courant.

— La machine B produit beaucoup plus de rebuts.

— **Leçon** : à moyenne égale, c'est l'**écart-type** qui détermine la proportion de valeurs éloignées ; l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donnera un majorant de ces proportions.

Réponse. a) 5σ et $\approx 1,67\sigma$ · b) la machine B.

Correction de l'exercice 6 - Le contraire d'un écart

a) La valeur absolue se découpe en deux cas :

$$A = \{X \leq 42\} \cup \{X \geq 58\} \quad \bar{A} = \{42 < X < 58\}$$

b) Les deux parties de A sont **incompatibles** :

$$- P(A) = 0,07 + 0,05 = 0,12 ;$$

$$- P(42 < X < 58) = 1 - 0,12 = 0,88.$$

— **Remarque** : l'écart est ici **asymétrique** (0,07 à gauche, 0,05 à droite) ; la valeur absolue regroupe les deux côtés.

— **Piège** : les inégalités **larges** de A deviennent **strictes** dans $\bar{A}$.

Réponse. a) $A = \{X \leq 42\} \cup \{X \geq 58\}$ · b) $P(A) = 0,12$; $P(\bar{A}) = 0,88$.

Correction de l'exercice 7 - Moyenne d'un échantillon

a) Par linéarité et indépendance :

$$E(M_n) = \mu = 20 \quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

— $n = 9$: $\sigma(M_9) = \frac{6}{3} = 2$;

— $n = 36$: $\sigma(M_{36}) = \frac{6}{6} = 1$.

b) $\frac{6}{\sqrt{n}} = 0,5 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 12 \Leftrightarrow n = 144$.

— **Interprétation** : la moyenne reste centrée sur μ , mais se **concentre** autour d'elle quand n augmente ; quadrupler n divise l'écart-type par 2.

Réponse. a) $E = 20$; $\sigma = 2$ puis 1 · b) $n = 144$.

Correction de l'exercice 8 - Somme et moyenne ne se comportent pas pareil

a) Pour n variables indépendantes de même loi :

$$\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n} \quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

— $n = 100$: $\sigma(S_{100}) \approx 17,1$ et $\sigma(M_{100}) \approx 0,171$.

b) L'écart-type de la **somme augmente** (comme $\sqrt{n}$) : la somme s'étale en valeur absolue.

L'écart-type de la **moyenne diminue** (comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$) : la moyenne se concentre autour de 3,5.

— **Nuance** : même la somme se concentre **relativement** à sa valeur moyenne :

$$\frac{\sigma(S_n)}{E(S_n)} = \frac{1,71}{3,5\sqrt{n}} \text{ tend vers } 0.$$

Réponse. a) $\approx 17,1$ et $\approx 0,171$ · b) la somme s'étale, la moyenne se concentre.

Correction de l'exercice 9 - Écart et transformation affine

a) $E(F) = 1,8 \times 15 + 32 = 59$. Donc

$$F - E(F) = 1,8C + 32 - 59 = 1,8(C - 15) \quad |F - 59| = 1,8 |C - 15|$$

b) $|F - 59| \geq 9 \Leftrightarrow 1,8 |C - 15| \geq 9 \Leftrightarrow |C - 15| \geq 5$: les deux événements sont **identiques**, ils ont la même probabilité.

— **Interprétation** : un écart de 9 °F correspond à un écart de 5 °C ; changer d'unité ne change pas les probabilités d'écart, à condition de convertir aussi δ .

— **En écarts-types** : $\frac{9}{1,8 \times 4} = \frac{5}{4} = 1,25$ dans les deux unités ✓

Réponse. $|F - 59| = 1,8 |C - 15|$: les deux événements coïncident.

Correction de l'exercice 10 - Un écart asymétrique

a) Calcul :

$$\mu = 0 + 0,3 + 0,4 + 0,75 + 0,5 = 1,95$$

b) $|X - 1,95| \geq 3 \Leftrightarrow X \leq -1,05$ ou $X \geq 4,95$.

— Aucune valeur n'est $\leq -1,05$; les valeurs $\geq 4,95$ sont 5 et 10.

— $P(|X - \mu| \geq 3) = 0,15 + 0,05 = 0,2$.

Tout l'écart est **au-dessus** de la moyenne : la loi est **dissymétrique** (quelques grandes valeurs rares tirent la moyenne vers le haut).

— **Exemple concret** : les revenus ou les gains à un jeu ont souvent ce profil.

Réponse. a) $\mu = 1,95$ · b) 0,2, entièrement du côté des grandes valeurs.

Correction de l'exercice 11 - Proportion à un écart-type

a) $\mu = \frac{1+9}{2} = 5$ et

$$V = \frac{81-1}{12} = \frac{80}{12} \approx 6,67 \quad \sigma \approx 2,58$$

b) $|X - 5| < 2,58 \Rightarrow 2,42 < X < 7,58$: valeurs 3 à 7, soit 5 valeurs.

— $P(|X - 5| < \sigma) = \frac{5}{9} \approx 0,56$.

— $|X - 5| < 5,16$: toutes les valeurs de 1 à 9, donc $P = 1$.

— **Comparaison** : pour une loi uniforme, aucune valeur n'est à plus de 2σ ; les lois « en cloche » ont au contraire quelques valeurs éloignées.

Réponse. a) $\mu = 5$, $\sigma \approx 2,58$ · b) $\frac{5}{9}$ et 1.

Correction de l'exercice 12 - Un écart calculé exactement

a) Calcul :

$$\mu = 20 \times 0,5 = 10 \quad \sigma = \sqrt{20 \times 0,25} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

b) $|X - 10| \geq 5 \Leftrightarrow X \leq 5$ ou $X \geq 15$.

— Pour $p = 0,5$, la loi est **symétrique** autour de 10 : $P(X \geq 15) = P(X \leq 5) \approx 0,0207$.

— $P(|X - 10| \geq 5) \approx 2 \times 0,0207 = 0,0414$.

— **Interprétation** : un écart de 5, soit environ 2,2 écarts-types, n'arrive que dans 4 % des cas.

— **À comparer** avec le majorant $\frac{V}{\sigma^2} = \frac{5}{25} = 0,2$ de Bienaymé-Tchebychev.

Réponse. a) $\mu = 10$, $\sigma = \sqrt{5}$ · b) $\approx 0,041$.

Correction de l'exercice 13 - Température d'un local

a) Loi symétrique autour de 20,5 : $E(T) = 20,5$. Écarts au carré (6,25 ; 2,25 ; 0,25 symétriquement) :

$$V(T) = 2(0,05 \times 6,25 + 0,15 \times 2,25 + 0,3 \times 0,25) = 2 \times 0,725 = 1,45$$

— $\sigma(T) = \sqrt{1,45} \approx 1,20$ °C.

b) $|T - 20,5| \geq 2 \Leftrightarrow T \leq 18,5$ ou $T \geq 22,5$, soit $T = 18$ ou $T = 23$.

— $P(\text{alarme}) = 0,05 + 0,05 = 0,1$.

— **Remarque** : $T = 22$ ne déclenche pas l'alarme (écart $1,5 < 2$).

Réponse. a) $E = 20,5$ °C, $\sigma \approx 1,20$ °C · b) 0,1.

Correction de l'exercice 14 - Somme de variables et écart

a) $\sigma(S) = \sqrt{29,2} \approx 5,40$.

b) $|S - 35| \geq 10 \Leftrightarrow S \leq 25 \text{ ou } S \geq 45$.

c) Calcul :

$$\frac{V}{\delta^2} = \frac{29,2}{100} \approx 0,292$$

- Ce nombre est un **majorant** de $P(|S - 35| \geq 10)$ (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) : au plus 29 % des lancers de 10 dés donnent une somme hors de $]25 ; 45[$.
- En réalité, la probabilité est bien plus faible (environ 8 %), car la loi de S est très concentrée.

Réponse. a) $\sigma \approx 5,4$ · b) $S \leq 25$ ou $S \geq 45$ · c) $\approx 0,29$, un majorant.

Correction de l'exercice 15 - Une variance nulle interdit tout écart

a) $V(X) = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2$ est une somme de termes positifs ; elle est nulle seulement si chaque x_i (de probabilité non nulle) vaut μ : X est **constante**, égale à μ .

b) Alors $|X - \mu| = 0 < \delta$ toujours :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) = 0$$

c) Une **petite variance** indique que les écarts au carré sont petits « en moyenne » ; les grands écarts doivent donc être **rare**s.

— C'est exactement ce que quantifie l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}, \text{ qui vaut bien 0 quand } V = 0.$$

Réponse. a) somme de termes positifs nulle · b) 0 · c) les grands écarts sont rares.