

Plaquette 2 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Concentration, loi des grands nombres — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour toute variable X d'espérance μ et de variance V , et tout réel $\delta > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

Forme équivalente (événement contraire) :

$$P(\mu - \delta < X < \mu + \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}$$

En écarts-types ($\delta = k\sigma$) : $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. Ainsi, au plus 25 % des valeurs sont à 2σ ou plus, au plus 11,1 % à 3σ ou plus.

Inégalité de Markov (variable positive, $a > 0$) : $P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$.

Bienaymé-Tchebychev s'en déduit avec $Y = (X - \mu)^2$ et $a = \delta^2$.

Intervalle non centré : si l'intervalle contient $]\mu - \delta; \mu + \delta[$, sa probabilité est au moins $1 - \frac{V}{\delta^2}$. Un événement **inclus** dans $\{|X - \mu| \geq \delta\}$ a une probabilité au plus $\frac{V}{\delta^2}$.

⚠ Pour $\delta \leq \sigma$, le majorant dépasse 1 : l'inégalité n'apporte rien.

Correction de l'exercice 1 - Une application directe

a) **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** avec $\delta = 8$:

$$P(|X - 100| \geq 8) \leq \frac{16}{8^2} = \frac{16}{64} = 0,25$$

b) $\{92 < X < 108\}$ est le **contraire** de $\{|X - 100| \geq 8\}$:

— $P(92 < X < 108) \geq 1 - 0,25 = 0,75$.

— **Lecture** : au moins 75 % des valeurs de X sont à moins de 8 de la moyenne, soit à moins de 2 écarts-types ($\sigma = 4$).

— **Remarque** : on n'a utilisé ni la loi de X , ni sa forme ; seulement μ et V .

Réponse. a) $\leq 0,25$ · b) $\geq 0,75$.

Correction de l'exercice 2 - La règle des k écarts-types

a) On applique Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = k\sigma$:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2} = \frac{1}{k^2}$$

b) - $k = 2$: au plus $\frac{1}{4} = 25$ % des valeurs à 2σ ou plus ;

— $k = 3$: au plus $\frac{1}{9} \approx 11,1$ % ;

— $k = 10$: au plus 1 %.

Pour toute loi, les écarts de plusieurs écarts-types sont rares.

c) Pour $k = 1$, le majorant vaut 1 : l'inégalité est **vraie mais inutile** (une probabilité est toujours inférieure à 1).

Réponse. b) 25 % ; 11,1 % ; 1 % · c) majorant 1, inutile.

Correction de l'exercice 3 - Une inégalité souvent grossière

a) Calcul :

$$P(|X - 3,5| \geq 2) \leq \frac{35/12}{4} = \frac{35}{48} \approx 0,73$$

b) L'événement correspond à $X \in \{1; 6\}$: probabilité exacte $\frac{1}{3} \approx 0,33$. Le majorant est plus de deux fois trop grand.

c) - **Majorant** : $\frac{35/12}{9} \approx 0,32$.

— **Exact** : $|X - 3,5| \geq 3$ impose $X \leq 0,5$ ou $X \geq 6,5$: **impossible**, probabilité 0.

— **Leçon** : l'inégalité est **universelle** (valable pour toute loi), c'est pourquoi elle est souvent loin de la valeur exacte. Elle sert quand on ne connaît pas la loi.

Réponse. a) $\leq 0,73$ · b) exact $\frac{1}{3}$ · c) majorant $\approx 0,32$, exact 0.

Correction de l'exercice 4 - Trouver l'écart garanti

a) D'après Bienaymé-Tchebychev, il suffit que

$$\frac{V}{\delta^2} \leq 0,04 \Leftrightarrow \delta^2 \geq \frac{9}{0,04} = 225 \Leftrightarrow \delta \geq 15$$

— On peut prendre $\delta = 15$ (soit 5 écarts-types, $\sigma = 3$).

b) $P(\mu - 15 < X < \mu + 15) \geq 1 - 0,04 = 0,96$: l'intervalle $]\mu - 15; \mu + 15[$ convient.

— **Remarque** : pour une loi en cloche, un intervalle à $\pm 2\sigma = \pm 6$ suffirait souvent ; Bienaymé-Tchebychev demande ± 15 parce qu'il doit être vrai pour **toutes** les lois.

Réponse. a) $\delta = 15$ · b) $]\mu - 15; \mu + 15[$.

Correction de l'exercice 5 - Remplissage de sachets

Un sachet est non conforme si $|M - 500| \geq 12$. **Bienaymé-Tchebychev** avec $V = 16$ et $\delta = 12$:

$$P(|M - 500| \geq 12) \leq \frac{16}{144} = \frac{1}{9} \approx 0,111$$

— Au plus 11,1 % de sachets non conformes.

— **En écarts-types** : $12 = 3\sigma$, et l'on retrouve le majorant $\frac{1}{3^2}$.

— **Réalité** : si la masse suit une loi en cloche, la proportion réelle serait inférieure à 0,3 % ; l'inégalité donne une garantie **sans hypothèse** sur la forme de la loi.

Réponse. Au plus $\frac{1}{9} \approx 11,1$ %.

Correction de l'exercice 6 - Majorant et valeur exacte pour une binomiale

a) $\mu = 200 \times 0,3 = 60$ et $V = 200 \times 0,3 \times 0,7 = 42$. **Bienaymé-Tchebychev** :

$$P(|X - 60| \geq 15) \leq \frac{42}{225} \approx 0,187$$

- b) La valeur exacte ($\approx 0,025$) est environ **sept fois plus petite** que le majorant.
- Le majorant est **correct** (il est bien supérieur) mais **peu précis**.
 - **Quand l'utiliser** : quand la loi exacte est inconnue ou trop compliquée ; ici, la calculatrice donnait directement la valeur exacte.

Réponse. a) $\mu = 60$, $V = 42$, majorant $\approx 0,187$ · b) exact $\approx 0,025$.

Correction de l'exercice 7 - Un écart d'un seul côté

Bienaymé-Tchebychev porte sur un écart **des deux côtés**. On remarque que

$$\{X \geq 75\} \subset \{|X - 60| \geq 15\}$$

(si $X \geq 75$, alors $X - 60 \geq 15$).

- Donc $P(X \geq 75) \leq P(|X - 60| \geq 15) \leq \frac{42}{225} \approx 0,187$.
- **Valeur exacte** : $P(X \geq 75) \approx 0,014$; le majorant est encore plus grossier, car il compte aussi les écarts vers le bas.
- **Méthode** : un événement **inclus** dans l'écart symétrique a une probabilité plus petite ; on peut donc lui appliquer la même majoration.

Réponse. $P(X \geq 75) \leq \frac{42}{225} \approx 0,187$.

Correction de l'exercice 8 - Minorer un intervalle centré

On reconnaît des intervalles **centrés** sur $\mu = 30$ et on utilise la forme contraire :

$$P(\mu - \delta < X < \mu + \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}$$

a) $\delta = 10$: $P(20 < X < 40) \geq 1 - \frac{25}{100} = 0,75$.

b) $\delta = 15$: $P(15 < X < 45) \geq 1 - \frac{25}{225} = \frac{8}{9} \approx 0,889$.

- **Lecture** : au moins 75 % des valeurs à moins de 2σ , au moins 88,9 % à moins de 3σ , **quelle que soit la loi**.

Réponse. a) $\geq 0,75$ · b) $\geq \frac{8}{9} \approx 0,889$.

Correction de l'exercice 9 - Un intervalle non centré

L'intervalle $]18; 45[$ n'est **pas centré** sur 30 ($30 - 18 = 12$ et $45 - 30 = 15$). On prend le plus grand intervalle centré **contenu** dedans :

$$]30 - 12; 30 + 12[=]18; 42[\subset]18; 45[$$

— Donc $P(18 < X < 45) \geq P(18 < X < 42) \geq 1 - \frac{25}{12^2} = 1 - \frac{25}{144} \approx 0,826$.

- **Méthode** : on choisit δ égal à la **plus petite** distance de μ aux bornes ; prendre $\delta = 15$ serait faux, car $]15; 45[$ n'est pas contenu dans $]18; 45[$.

Réponse. $P(18 < X < 45) \geq \frac{119}{144} \approx 0,826$.

Correction de l'exercice 10 - Démontrer l'inégalité

Soit X d'espérance μ et de variance V , et $\delta > 0$. On pose $Y = (X - \mu)^2$, variable **positive**, et $a = \delta^2$.

- **Événements égaux** : $|X - \mu| \geq \delta \Leftrightarrow (X - \mu)^2 \geq \delta^2$ (les deux membres sont positifs et la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$).
- **Espérance de Y** : $E((X - \mu)^2) = V$, par définition de la variance.
- **Markov** :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) = P(Y \geq \delta^2) \leq \frac{E(Y)}{\delta^2} = \frac{V}{\delta^2}$$

- **Idée** : la variance est la moyenne des carrés des écarts ; si beaucoup d'écarts étaient grands, cette moyenne serait grande.

Réponse. Markov avec $Y = (X - \mu)^2$ et $a = \delta^2$.

Correction de l'exercice 11 - Temps d'attente

L'événement $\{T \geq 25\}$ est inclus dans $\{|T - 10| \geq 15\}$. Par **Bienaymé-Tchebychev** :

$$P(T \geq 25) \leq P(|T - 10| \geq 15) \leq \frac{9}{225} = 0,04$$

- Au plus 4 % des clients attendent 25 minutes ou plus.
- **En écarts-types** : $15 = 5\sigma$, et $\frac{1}{5^2} = 0,04$ ✓
- **Remarque** : un temps d'attente est positif ; l'écart vers le bas ($T \leq -5$) est impossible, donc la probabilité réelle est même inférieure.

Réponse. $P(T \geq 25) \leq 0,04$.

Correction de l'exercice 12 - Un cas d'égalité

a) Loi symétrique : $E(X) = 0$. Puis

$$V(X) = \frac{1}{8} \times 4 + \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{8} \times 4 = 1$$

b) $|X| \geq 2 \Leftrightarrow X = \pm 2$: $P = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

— **Majorant** : $\frac{V}{\delta^2} = \frac{1}{4}$.

Il y a **égalité** : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne peut pas être améliorée en général.

- **Pourquoi** : toute la « variance » vient de valeurs situées **exactement** à la distance δ ; il n'y a aucun écart intermédiaire qui « gaspillerait » de la variance.

Réponse. a) $E = 0$, $V = 1$ · b) $\frac{1}{4}$ = majorant : égalité.

Correction de l'exercice 13 - Pannes mensuelles

a) $\{X \geq 9\} \subset \{|X - 3| \geq 6\}$, donc par **Bienaymé-Tchebychev**

$$P(X \geq 9) \leq \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12} \approx 0,083$$

b) $\frac{1}{12} < \frac{1}{10}$: l'affirmation est **justifiée**, et ce sans connaître la loi de X .

- **Remarque** : pour certaines lois (loi de Poisson, par exemple), la probabilité réelle est bien plus faible (moins de 0,5 %) ; l'inégalité donne une **garantie**, pas une estimation.

Réponse. a) $\leq \frac{1}{12}$ · b) oui.

Correction de l'exercice 14 - La somme de dix dés

a) **Bienaymé-Tchebychev** :

$$P(|S - 35| \geq 10) \leq \frac{29,17}{100} \approx 0,292 \quad P(25 < S < 45) \geq 1 - 0,292 = 0,708$$

b) Il suffit que $\frac{29,17}{\delta^2} \leq 0,1$, soit $\delta^2 \geq 291,7$ et $\delta \geq 17,1$ environ.

— Avec $\delta = 18$: au moins 90 % des sommes sont dans $]17; 53[$.

— **Réalité** : la probabilité exacte d'un écart de 10 ou plus est d'environ 0,08 ; la somme de dix dés est beaucoup plus concentrée que ne le « garantit » l'inégalité.

Réponse. a) $\leq 0,292$; $\geq 0,708$ · b) $\delta \approx 17,1$ suffit.

Correction de l'exercice 15 - Comparer deux variables par l'inégalité

a) **Bienaymé-Tchebychev** avec $\delta = 10$:

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{4}{100} = 0,04 \quad P(|Y - 50| \geq 10) \leq \frac{36}{100} = 0,36$$

b) La variable X est garantie de rester à moins de 10 de sa moyenne dans au moins 96 % des cas ; pour Y , la garantie tombe à 64 %.

— X est plus **fiable** : sa variance, neuf fois plus petite, rend les grands écarts beaucoup plus rares.

— **Exemple** : deux instruments de mesure sans biais, dont l'un est trois fois plus précis ($\sigma = 2$ contre 6).

Réponse. a) $\leq 0,04$ et $\leq 0,36$ · b) X .