

Plaquette 3 - Concentration des fréquences

Concentration, loi des grands nombres — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Quand on répète n fois une épreuve de Bernoulli, la **fréquence** F_n des succès a pour espérance p et pour variance $\frac{p(1-p)}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à F_n montre qu'elle se **concentre** autour de p . On s'en sert pour majorer un risque d'écart, trouver une taille d'échantillon, ou juger si une fréquence observée est compatible avec une probabilité supposée.

Exercice 1 - Espérance et variance d'une fréquence

On lance n fois une pièce qui donne « pile » avec la probabilité p . On note X_n le nombre de « pile » et $F_n = \frac{X_n}{n}$.

- Montrer que $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.
- En déduire l'inégalité $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$.

Exercice 2 - Un majorant universel

- Montrer que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $p \in [0; 1]$.
- En déduire un majorant de $P(|F_n - p| \geq \delta)$ qui ne dépend pas de p .

Exercice 3 - Mille lancers de pièce

On lance 1 000 fois une pièce équilibrée ; F est la fréquence de « pile ».

- Majorer $P(|F - 0,5| \geq 0,05)$.
- En déduire un intervalle contenant F avec une probabilité d'au moins 0,9.

Exercice 4 - Combien d'essais pour une précision d'un point ?

On veut estimer une probabilité p inconnue par une fréquence F_n , avec la garantie $P(|F_n - p| \geq 0,01) \leq 0,05$.

Quelle taille n suffit ?

Exercice 5 - Fréquence des six

On lance 600 fois un dé équilibré ; F est la fréquence d'apparition du 6.

- Calculer $E(F)$ et $V(F)$.
- Majorer $P\left(F - \frac{1}{6} \geq 0,05\right)$.

Exercice 6 - Un intervalle de fluctuation

On lance 400 fois une pièce équilibrée. Déterminer, à l'aide de l'inégalité de concentration, un intervalle centré en 0,5 contenant la fréquence de « pile » avec une probabilité d'au moins 0,95.

Exercice 7 - Un sondage de 2 000 personnes

Un institut interroge 2 000 personnes pour estimer la proportion p d'électeurs favorables à un projet.

- a) Majorer, sans connaître p , le risque que la fréquence observée s'écarte de p d'au moins 4 points.
- b) Le sondage donne 52 %. Peut-on affirmer que le projet est majoritaire ?

Exercice 8 - Taux de défaut

Une chaîne de production a un taux de défaut $p = 0,02$. On contrôle un échantillon de 5 000 pièces ; F est la fréquence de pièces défectueuses.

Majorer la probabilité que F s'écarte de 0,02 d'au moins 0,01.

Exercice 9 - Une pièce suspecte

Sur 2 000 lancers d'une pièce, on obtient 1 120 « pile », soit une fréquence de 0,56.

- a) Si la pièce était équilibrée, majorer la probabilité d'observer une fréquence aussi éloignée de 0,5.
- b) Que peut-on conclure ?

Exercice 10 - Majorant contre valeur exacte

On lance 100 fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de « pile ».

- a) Majorer $P(|F - 0,5| \geq 0,1)$ par l'inégalité de concentration.
- b) À la calculatrice, $P(X \leq 40) \approx 0,0284$. En déduire la valeur exacte et comparer.

Exercice 11 - Précision et taille d'échantillon

On note $b(n, \delta) = \frac{1}{4n\delta^2}$ le majorant universel.

- a) Que devient b si l'on double n ? si l'on divise δ par 2 ?
- b) Un sondage de 1 000 personnes garantit un certain risque pour une marge de ± 3 points. Combien faut-il interroger de personnes pour la même garantie avec une marge de $\pm 1,5$ point ?

Exercice 12 - Naissances de garçons

La probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est environ $p = 0,512$.

- a) Dans une maternité de 100 naissances par an, majorer la probabilité que la fréquence de garçons s'écarte de p d'au moins 0,05. Commenter.
- b) Même question pour un pays de 10 000 naissances.

Exercice 13 - Estimer avec une marge de 2 points

On veut estimer une proportion inconnue avec une marge d'erreur de ± 2 points et un risque d'au plus 10 %.

- a) Déterminer une taille d'échantillon suffisante.
- b) Si l'on sait que $p \leq 0,1$, quelle taille suffit ?

Exercice 14 - La roulette et le rouge

À la roulette, la probabilité que « rouge » sorte est $p = \frac{18}{37}$. Sur 10 000 tours, on note F la fréquence des « rouge ».

- a) Calculer $p(1 - p)$.
- b) Majorer $P(|F - p| \geq 0,02)$ et interpréter.

Exercice 15 - Ce que la concentration ne dit pas

Après 10 lancers d'une pièce équilibrée, on a obtenu 8 « pile ». Un joueur pense que les prochains lancers donneront plus souvent « face » pour que la fréquence « revienne » vers 0,5.

- a) La probabilité d'obtenir « face » au lancer suivant est-elle modifiée ?
- b) Sur 1 000 lancers supplémentaires, que devient l'influence des 8 « pile » initiaux sur la fréquence ?