

Plaquette 1 - Espérance, variance, écart à la moyenne

Concentration, loi des grands nombres — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Ce chapitre étudie la probabilité qu'une variable s'**écarte** de son espérance d'au moins une certaine distance δ . On commence par savoir écrire cet événement, $\{|X - \mu| \geq \delta\}$, sous la forme « $X \leq \mu - \delta$ ou $X \geq \mu + \delta$ », puis calculer sa probabilité à partir de la loi. L'**écart-type** σ sert d'unité naturelle pour mesurer ces écarts.

Exercice 1 - Calculer un écart à la moyenne

X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 avec les probabilités 0,1 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,2 ; 0,1.

- Calculer $\mu = E(X)$, $V(X)$ et σ .
- Calculer $P(|X - \mu| \geq \sigma)$.

Exercice 2 - L'intervalle à deux écarts-types

On lance 100 fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de « pile ».

- Calculer μ et σ .
- Déterminer l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.
- À la calculatrice, $P(40 \leq X \leq 60) \approx 0,965$. Interpréter.

Exercice 3 - Écart au centre pour un dé

X est le résultat d'un dé équilibré ($\mu = 3,5$, $V = \frac{35}{12}$).

- Calculer $P(|X - 3,5| \geq 2)$.
- Calculer $\frac{V}{\delta^2}$ pour $\delta = 2$ et comparer.

Exercice 4 - Mesurer un écart en écarts-types

Les notes d'un examen ont pour moyenne 11 et pour écart-type 3.

- À combien d'écarts-types de la moyenne se situent les notes 17, 8 et 12,5 ?
- Écrire l'événement « la note s'écarte de la moyenne d'au moins deux écarts-types » à l'aide d'inégalités.

Exercice 5 - Deux machines, deux dispersions

Deux machines fabriquent des vis de diamètre moyen 10 mm. La machine A a un écart-type de 0,1 mm, la machine B de 0,3 mm. Une vis est rejetée si son diamètre s'écarte de plus de 0,5 mm de 10 mm.

- Pour chaque machine, exprimer l'écart toléré en nombre d'écarts-types.
- Laquelle produira le plus de rebuts ? Pourquoi ?

Exercice 6 - Le contraire d'un écart

X est une variable d'espérance 50. On note A l'événement $\{|X - 50| \geq 8\}$.

- Écrire A et son contraire $\bar{A}$ à l'aide d'inégalités sur X .
- On sait que $P(X \leq 42) = 0,07$ et $P(X \geq 58) = 0,05$. Calculer $P(A)$ et $P(42 < X < 58)$.

Exercice 7 - Moyenne d'un échantillon

$X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes de même loi, d'espérance $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 6$. On pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

- Calculer $E(M_n)$ et $\sigma(M_n)$ pour $n = 9$ et $n = 36$.
- Pour quelle taille n l'écart-type de M_n vaut-il 0,5 ?

Exercice 8 - Somme et moyenne ne se comportent pas pareil

On lance n dés ($\mu = 3,5$, $\sigma \approx 1,71$ pour un dé). On note S_n la somme et M_n la moyenne des résultats.

- Calculer $\sigma(S_n)$ et $\sigma(M_n)$ pour $n = 100$.
- Quand n augmente, la somme se concentre-t-elle ? Et la moyenne ?

Exercice 9 - Écart et transformation affine

Une température C (en °C) a pour espérance 15 et pour écart-type 4. On pose $F = 1,8C + 32$ (en °F).

- Montrer que $|F - E(F)| = 1,8 |C - 15|$.
- En déduire que $P(|F - 59| \geq 9) = P(|C - 15| \geq 5)$.

Exercice 10 - Un écart asymétrique

La loi d'une variable X est :

x	0	1	2	5	10
$P(X = x)$	0,3	0,3	0,2	0,15	0,05

- Calculer μ .
- Calculer $P(|X - \mu| \geq 3)$. De quel côté se trouve l'essentiel de cette probabilité ?

Exercice 11 - Proportion à un écart-type

X suit la loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; 9\}$ (on rappelle $V = \frac{n^2 - 1}{12}$).

- Calculer μ et σ .
- Calculer $P(|X - \mu| < \sigma)$ et $P(|X - \mu| < 2\sigma)$.

Exercice 12 - Un écart calculé exactement

$X \sim B(20; 0,5)$.

- Calculer μ et σ .

b) À la calculatrice, $P(X \leq 5) \approx 0,0207$. En utilisant la symétrie de la loi, calculer $P(|X - 10| \geq 5)$.

Exercice 13 - Température d'un local

La température (en °C) d'un local serveur, relevée chaque heure, suit la loi :

t	18	19	20	21	22	23
$P(T = t)$	0,05	0,15	0,3	0,3	0,15	0,05

- Calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$.
- Une alarme se déclenche si la température s'écarte de 2 °C ou plus de la moyenne. Calculer la probabilité d'alarme à un relevé donné.

Exercice 14 - Somme de variables et écart

On lance 10 dés et on note S la somme ($\mu = 35$, $V = \frac{175}{6} \approx 29,2$).

- Calculer $\sigma(S)$.
- Écrire l'événement « la somme s'écarte de 35 d'au moins 10 » à l'aide d'inégalités sur S .
- Calculer $\frac{V}{\delta^2}$ pour $\delta = 10$. Que représente ce nombre ?

Exercice 15 - Une variance nulle interdit tout écart

Soit X une variable de variance nulle.

- Rappeler pourquoi X est alors constante.
- Que vaut $P(|X - \mu| \geq \delta)$ pour tout $\delta > 0$?
- Plus généralement, que suggère une petite variance sur les écarts à la moyenne ?