

Plaquette 2 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Concentration, loi des grands nombres — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev majore la probabilité d'un écart à l'espérance **en ne connaissant que la variance** : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$. On l'utilise pour **majorer** une probabilité d'écart, **minorer** la probabilité d'un intervalle centré, ou trouver l'écart δ qui garantit un risque donné. Elle est toujours vraie, mais souvent **grossière**.

Exercice 1 - Une application directe

Une variable X a pour espérance 100 et pour variance 16.

- Majorer $P(|X - 100| \geq 8)$.
- En déduire une minoration de $P(92 < X < 108)$.

Exercice 2 - La règle des k écarts-types

- Démontrer que, pour tout $k > 0$, $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$.
- Calculer ce majorant pour $k = 2$, $k = 3$ et $k = 10$. Interpréter.
- Que donne l'inégalité pour $k = 1$?

Exercice 3 - Une inégalité souvent grossière

X est le résultat d'un dé équilibré ($\mu = 3,5$ et $V = \frac{35}{12}$).

- Majorer $P(|X - 3,5| \geq 2)$ par Bienaymé-Tchebychev.
- Calculer la valeur exacte et comparer.
- Même question avec $\delta = 3$.

Exercice 4 - Trouver l'écart garanti

Une variable X a pour espérance μ et pour variance 9.

- Déterminer un réel δ tel que $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq 0,04$.
- En déduire un intervalle contenant X avec une probabilité d'au moins 96 %.

Exercice 5 - Remplissage de sachets

Une machine remplit des sachets de sucre ; la masse (en g) a pour espérance 500 et pour écart-type 4. Un sachet est non conforme si sa masse n'est pas dans $]488 ; 512[$. Majorer la proportion de sachets non conformes.

Exercice 6 - Majorant et valeur exacte pour une binomiale

$X \sim B(200; 0,3)$.

- Calculer μ et V , puis majorer $P(|X - 60| \geq 15)$.
- La valeur exacte est environ 0,025. Commenter.

Exercice 7 - Un écart d'un seul côté

Avec $X \sim B(200; 0,3)$ ($\mu = 60$, $V = 42$), majorer $P(X \geq 75)$.

Exercice 8 - Minorer un intervalle centré

Une variable X a pour espérance 30 et pour écart-type 5.

- Minorer $P(20 < X < 40)$.
- Minorer $P(15 < X < 45)$.

Exercice 9 - Un intervalle non centré

Une variable X a pour espérance 30 et pour variance 25. Minorer $P(18 < X < 45)$.

Exercice 10 - Démontrer l'inégalité

On admet l'**inégalité de Markov** : pour toute variable Y positive et tout $a > 0$,
 $P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$.

En l'appliquant à une variable bien choisie, démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 11 - Temps d'attente

Le temps d'attente T (en minutes) à un guichet a pour espérance 10 et pour écart-type 3.

Majorer la probabilité d'attendre 25 minutes ou plus.

Exercice 12 - Un cas d'égalité

X prend les valeurs -2 , 0 et 2 avec les probabilités $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{8}$.

- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
- Calculer $P(|X| \geq 2)$ et comparer au majorant de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 13 - Pannes mensuelles

Le nombre de pannes mensuelles X d'un parc de machines a pour espérance 3 et pour variance 3.

- Majorer $P(X \geq 9)$.
- Le responsable affirme : « il y a moins d'une chance sur dix d'avoir 9 pannes ou plus dans le mois ». Est-ce justifié ?

Exercice 14 - La somme de dix dés

On lance 10 dés ; la somme S a pour espérance 35 et pour variance $\frac{175}{6} \approx 29,17$.

- a) Majorer $P(|S - 35| \geq 10)$ et minorer $P(25 < S < 45)$.
- b) Déterminer δ tel que $P(|S - 35| \geq \delta) \leq 0,1$.

Exercice 15 - Comparer deux variables par l'inégalité

Deux variables X et Y ont la même espérance 50, et pour variances respectives 4 et 36.

- a) Pour chacune, majorer la probabilité de s'écarter de 50 d'au moins 10.
- b) Laquelle peut-on considérer comme la plus « fiable » ?