

Plaquette 4 - Loi des grands nombres et échantillons

Concentration, loi des grands nombres — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Un **échantillon** de taille n est une liste de n variables indépendantes de même loi. Leur **moyenne** M_n a la même espérance μ , mais une variance n fois plus petite. L'**inégalité de concentration** en déduit que M_n s'écarte rarement de μ , et la **loi des grands nombres** affirme que cette probabilité d'écart tend vers 0. On l'applique pour dimensionner un échantillon ou justifier une méthode d'estimation (Monte-Carlo, moyennes de mesures).

Exercice 1 - Moyenne d'un échantillon

On considère un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de variables indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance V .

- Démontrer que $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$.
- En déduire l'inégalité de concentration.

Exercice 2 - Démontrer la loi des grands nombres

À l'aide de l'inégalité de concentration, démontrer que pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$.

Exercice 3 - Durée de vie d'ampoules

La durée de vie d'une ampoule a pour espérance 1 000 h et pour écart-type 100 h. On teste un échantillon de 50 ampoules et on calcule leur durée de vie moyenne M .

- Calculer $E(M)$ et $\sigma(M)$.
- Majorer $P(|M - 1\,000| \geq 30)$.

Exercice 4 - Estimer π au hasard

On tire $n = 10\,000$ points au hasard dans le carré $[0; 1]^2$; X_i vaut 1 si le i -ème point est dans le quart de disque de centre O et de rayon 1, et 0 sinon. On estime π par $4M_n$.

- Justifier que $P(X_i = 1) = \frac{\pi}{4}$.
- Calculer $E(4M_n)$ et $V(4M_n)$.
- Majorer $P(|4M_n - \pi| \geq 0,05)$.

Exercice 5 - Le poids moyen de pommes

Un producteur veut estimer le poids moyen μ (inconnu) de ses pommes. On sait que l'écart-type du poids est 20 g. Il pèse 100 pommes prises au hasard.

- Majorer la probabilité que le poids moyen de l'échantillon s'écarte de μ d'au moins 5 g.

b) Combien de pommes faudrait-il peser pour que ce risque soit au plus 5 % ?

Exercice 6 - Taille minimale d'un échantillon

Une grandeur a un écart-type de 15. On veut estimer son espérance à ± 3 près, avec un risque d'erreur d'au plus 1 %.

Quelle taille d'échantillon suffit ?

Exercice 7 - Somme contre moyenne

Des variables indépendantes X_i ont pour espérance 10 et pour écart-type 2.

a) Calculer $\sigma(S_n)$ et $\sigma(M_n)$ pour $n = 100$ et $n = 10\,000$.

b) La somme S_n se rapproche-t-elle de $10n$? La moyenne M_n se rapproche-t-elle de 10 ?

Exercice 8 - Le casino gagne à la longue

À chaque partie, le gain d'un joueur a pour espérance $-0,1$ € et pour écart-type 2 €. On note M_n son gain moyen après n parties indépendantes.

a) Montrer que « le joueur est gagnant après n parties » implique $|M_n + 0,1| \geq 0,1$.

b) En déduire un majorant de la probabilité d'être gagnant, puis sa valeur pour $n = 10\,000$.

Exercice 9 - Mutualiser les risques

Une mutuelle rembourse chaque année à chaque adhérent une somme d'espérance 800 € et d'écart-type 1 000 € (dépenses indépendantes). La cotisation est de 820 €.

a) Avec 10 000 adhérents, majorer la probabilité que le remboursement moyen dépasse la cotisation.

b) Même question avec 100 000 adhérents.

Exercice 10 - Fréquence et moyenne

On lance n fois un dé équilibré. On note $X_i = 1$ si le i -ème lancer donne un 6, et $X_i = 0$ sinon.

a) Quelle est la loi de X_i ? Que représente la moyenne M_n ?

b) Majorer $P\left(M_n - \frac{1}{6} \geq 0,05\right)$ pour $n = 60$ et pour $n = 6\,000$.

Exercice 11 - Moyenner des mesures

Un appareil mesure une longueur avec une erreur aléatoire d'espérance nulle et d'écart-type 0,8 mm, les mesures étant indépendantes.

a) On fait la moyenne de 25 mesures. Majorer la probabilité que cette moyenne s'écarte de la vraie longueur d'au moins 0,4 mm.

b) Même question avec 100 mesures.

Exercice 12 - Pas de compensation

À la roulette, « noir » vient de sortir 10 fois de suite. Un joueur mise sur « rouge » en pensant que la loi des grands nombres oblige le rouge à « rattraper son retard ».

- Les tours sont indépendants : quelle est la probabilité de « rouge » au tour suivant ?
- Que dit réellement la loi des grands nombres ? Expliquer l'erreur du joueur.

Exercice 13 - Deux instituts de mesure

Deux laboratoires mesurent la même grandeur d'espérance μ . Le laboratoire A fait 40 mesures avec un appareil d'écart-type 2 ; le laboratoire B fait 10 mesures avec un appareil d'écart-type 1.

Lequel obtient la moyenne la plus précise ? Comparer les majorants de $P(|M - \mu| \geq 0,5)$.

Exercice 14 - Moyenne de lancers et seuil

On lance n fois un dé équilibré ($\mu = 3,5$, $V = \frac{35}{12}$) et on note M_n la moyenne.

- Majorer $P(|M_n - 3,5| \geq 0,2)$ en fonction de n .
- À partir de quelle valeur de n ce majorant est-il inférieur à 0,01 ?

Exercice 15 - Pourquoi l'indépendance compte

On dispose d'un seul dé, qu'on lance **une fois** ; on recopie ce résultat n fois : $X_1 = X_2 = \dots = X_n$.

- Que vaut la moyenne M_n ? Calculer $V(M_n)$.
- La loi des grands nombres s'applique-t-elle ? Quelle hypothèse manque ?