

Plaqueette 5 - Problèmes de synthèse :
Bienaymé-Tchebychev, échantillons et sondages
Concentration, loi des grands nombres — Terminale spé maths
Exercices

Méthode

On majore les écarts à la moyenne avec l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, on applique l'**inégalité de concentration** à une moyenne d'échantillon, et on dimensionne un **sondage** en cherchant le n minimal.

Exercice 1 - Inégalité de Markov

Une variable positive X a pour espérance 4. Majorer $P(X \geq 10)$, puis $P(X \geq 20)$.

Exercice 2 - Bienaymé-Tchebychev de base

Une variable X a pour espérance 50 et pour variance 25. Majorer $P(|X - 50| \geq 10)$ puis minorer $P(40 < X < 60)$.

Exercice 3 - Application à une binomiale

Soit $X \sim B(100; 0,5)$. Majorer $P(|X - 50| \geq 15)$ par Bienaymé-Tchebychev, puis comparer à la valeur exacte 0,0035.

Exercice 4 - Moyenne d'un échantillon

On prélève un échantillon de taille $n = 400$ dans une population d'espérance $\mu = 20$ et de variance $V = 16$. Majorer $P(|M_n - 20| \geq 0,5)$.

Exercice 5 - Taille d'échantillon garantie

Une variable a pour variance 9. Quelle taille d'échantillon garantit $P(|M_n - \mu| \geq 0,3) \leq 0,05$?

Exercice 6 - Fréquence dans un sondage

Dans un sondage sur $n = 1000$ personnes, on estime une proportion p inconnue. Majorer $P(|F_n - p| \geq 0,05)$.

Exercice 7 - Dimensionner un sondage

Combien de personnes faut-il interroger pour garantir que la fréquence observée soit à moins de 0,02 de la proportion réelle avec une probabilité d'au moins 0,95 ?

Exercice 8 - Loi des grands nombres en acte

On lance un dé équilibré n fois et on note M_n la moyenne des résultats. Majorer $P(|M_n - 3,5| \geq 0,1)$ pour $n = 1000$, puis pour $n = 10\,000$.

Exercice 9 - Somme et non moyenne

On additionne les résultats de $n = 900$ lancers d'un dé. Majorer $P(|S_n - 3150| \geq 100)$.

Exercice 10 - Contrôle de production

Des pièces ont une longueur d'espérance 100 mm et d'écart type 0,4 mm. Une pièce est rejetée si sa longueur s'écarte de plus de 1 mm de la cible. Majorer la proportion de rejets.

Exercice 11 - Minoration d'un intervalle

Soit X d'espérance 12 et d'écart type 2. Minorer $P(6 < X < 18)$.

Exercice 12 - Fréquence avec p connu

Une pièce donne « pile » avec la probabilité $p = 0,6$. Sur $n = 500$ lancers, majorer $P(|F_n - 0,6| \geq 0,04)$, puis comparer à la majoration universelle.

Exercice 13 - Nombre de lancers

Combien de lancers d'un dé équilibré faut-il pour que la moyenne des résultats soit à moins de 0,05 de 3,5 avec une probabilité d'au moins 0,9 ?

Exercice 14 - Comparaison de deux échantillons

Deux instituts sondent la même population : l'un interroge 400 personnes, l'autre 2500. Comparer les majorants de $P(|F_n - p| \geq 0,03)$.

Exercice 15 - Estimation d'une variance

Une variable X vérifie $E(X) = 8$ et $P(|X - 8| \geq 4) = 0,05$. Que peut-on dire de la variance de X ?

Exercice 16 - Synthèse : sondage électoral

Un candidat est crédité d'une proportion p inconnue. Un institut interroge n personnes.

- Pour $n = 1600$, majorer $P(|F_n - p| \geq 0,025)$.
- Quel n garantit une précision de 0,01 avec un risque de 1 % ?
- L'institut obtient $F_n = 0,52$ sur 1600 personnes. Peut-on affirmer que le candidat est majoritaire ?