

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : équations, dichotomie et fonctions par morceaux

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires — Terminale spé maths Corrections détaillées

Boîte à outils

Continuité. f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- **Opérations** : somme, produit, quotient (dénominateur non nul) et **composée** de fonctions continues sont continues.
- Les fonctions **usuelles** (polynômes, rationnelles, $\sqrt{}$, exp, ln, sin, cos) sont continues sur leur domaine.
- **Dérivable** $\Rightarrow$ **continue** ; la réciproque est **fausse** ($|x|$ en 0).
- **Fonction par morceaux** : continuité en un point de raccord $a \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Théorème des valeurs intermédiaires. Si f est **continue** sur $[a; b]$, alors f prend **toute** valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

- **Corollaire** : si $f(a)$ et $f(b)$ sont de **signes contraires**, f s'annule au moins une fois sur $]a; b[$.
- **Version « bijection »** : si f est continue **et strictement monotone** sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$.

Méthode de rédaction attendue (à suivre systématiquement) :

1. f est continue sur l'intervalle (justifier **pourquoi**) ;
2. f est strictement monotone (par le signe de f') ;
3. calcul des valeurs aux bornes, encadrement de k ;
4. conclusion : **existence et unicité** de la solution.

Dichotomie. On part de $[a; b]$ avec $f(a)f(b) < 0$; à chaque étape on garde la moitié où le **changement de signe** persiste. Après n étapes, l'amplitude est $\frac{b-a}{2^n}$.

Bornes atteintes : une fonction continue sur un **segment** est bornée et atteint son maximum et son minimum.

Correction de l'exercice 1 - Continuité d'une fonction par morceaux

- **Sur** $] - \infty ; 2[$ **et** $]2 ; +\infty[$: chaque morceau est **polynomial**, donc continu ✓
- **Seul point à examiner** : $x = 2$.
- **Limite à gauche** : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \times 2 + 1 = 7$, et c'est aussi $f(2) = 7$.
- **Limite à droite** : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + a$.
- **Condition de continuité** en 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 + a = 7 \Leftrightarrow a = 3$$

- **Vérification** : avec $a = 3$, le second morceau vaut $4 + 3 = 7$ en 2 ✓
- **Remarque** : f est alors continue mais **non dérivable** en 2 — les dérivées valent 3 à gauche et $2x = 4$ à droite. Continuité et dérivabilité sont deux exigences distinctes.

Réponse. $a = 3$.

Correction de l'exercice 2 - TVI et corollaire

Soit $f(x) = x^3 + 2x - 5$.

Continuité et monotonie.

- f est **polynomiale**, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$$

donc f est **strictement croissante**.

Existence et unicité.

- $f(1) = 1 + 2 - 5 = -2 < 0$ et $f(2) = 8 + 4 - 5 = 7 > 0$.
- Par le **corollaire du TVI** (continuité + stricte monotonie), l'équation a une **unique** solution α , et $\alpha \in]1 ; 2[$.
- **Unicité sur $\mathbb{R}$ entier** : la stricte croissance interdit une seconde racine ailleurs.
- **Encadrement affiné** : $f(1,3) = 2,197 + 2,6 - 5 = -0,203$ et $f(1,4) = 2,744 + 2,8 - 5 = 0,544$, donc $\alpha \in]1,3 ; 1,4[$.
- **Valeur** : $\alpha \approx 1,3283$.

Réponse. Solution unique $\alpha \in]1 ; 2[$, soit $\alpha \approx 1,328$.

Correction de l'exercice 3 - Dichotomie

- **Continuité** : f est polynomiale ✓
- **Changement de signe** : $f(1) = 1 - 1 - 3 = -3 < 0$ et $f(2) = 8 - 2 - 3 = 3 > 0$ — le TVI donne une racine dans $]1 ; 2[$.

Dichotomie.

- **Milieu 1,5** : $f(1,5) = 3,375 - 1,5 - 3 = -1,125 < 0$. La racine est dans $]1,5 ; 2[$.
- **Milieu 1,75** : $f(1,75) = 5,359 - 1,75 - 3 = 0,609 > 0$. La racine est dans $]1,5 ; 1,75[$.
- **Encadrement obtenu** : $1,5 < \alpha < 1,75$, d'amplitude 0,25 ✓
- **Étape suivante** (pour information) : $f(1,625) = -0,334 < 0$, donc $\alpha \in]1,625 ; 1,75[$.
- **Valeur** : $\alpha \approx 1,6717$.
- **Coût de la méthode** : chaque étape **divise par 2** l'amplitude ; il faut n étapes pour atteindre $\frac{1}{2^n}$, soit 10 étapes pour 10^{-3} .

Réponse. $1,5 < \alpha < 1,75$ (et $\alpha \approx 1,672$).

Correction de l'exercice 4 - Équation avec exponentielle

Soit $g(x) = e^x + x - 2$.

- **Continuité** : somme de fonctions continues ✓
- **Monotonie** : pour tout réel x ,

$$g'(x) = e^x + 1 > 0$$

donc g est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

- **Limites** : $g \rightarrow -\infty$ en $-\infty$ (le terme $x - 2$ domine, l'exponentielle tendant vers 0) et $g \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.
- **Conclusion** : g réalise une **bijection** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$ a donc **une unique** solution α .

Encadrement.

- $g(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$ et $g(1) = 2,718 + 1 - 2 = 1,718 > 0$, donc $\alpha \in]0; 1[$.
- $g(0,4) = 1,4918 + 0,4 - 2 = -0,108 < 0$ et $g(0,5) = 1,6487 + 0,5 - 2 = 0,1487 > 0$.
- **Encadrement** : $0,4 < \alpha < 0,5$.
- **Valeur** : $\alpha \approx 0,4429$.
- **Astuce de rédaction** : transformer « $e^x = 2 - x$ » en « $g(x) = 0$ » est indispensable — le TVI s'applique à **une** fonction, pas à une égalité entre deux.

Réponse. Solution unique $\alpha \in]0,4; 0,5[$, soit $\alpha \approx 0,443$.

Correction de l'exercice 5 - Équation avec logarithme

Soit $h(x) = \ln x + x - 3$ sur $]0; +\infty[$.

- **Continuité** : somme de fonctions continues sur $]0; +\infty[$ ✓
- **Monotonie** : $h'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ — **strictement croissante**.
- **Limites** : en 0^+ , $\ln x \rightarrow -\infty$ donc $h \rightarrow -\infty$; en $+\infty$, $h \rightarrow +\infty$.
- **Conclusion** : bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc **une unique** solution α .

Encadrement.

- $h(2) = 0,693 + 2 - 3 = -0,307 < 0$ et $h(3) = 1,0986 + 3 - 3 = 1,0986 > 0$.
- Donc $\alpha \in]2; 3[$.
- **Affinage** : $h(2,2) = 0,7885 + 2,2 - 3 = -0,0115 < 0$ et $h(2,3) = 0,8329 + 2,3 - 3 = 0,1329 > 0$, donc $\alpha \in]2,2; 2,3[$.
- **Valeur** : $\alpha \approx 2,2079$.
- **Attention au domaine** : le logarithme impose $x > 0$ — l'intervalle d'étude n'est **pas** $\mathbb{R}$, et il faut le dire.

Réponse. Solution unique $\alpha \in]2; 3[$, soit $\alpha \approx 2,208$.

Correction de l'exercice 6 - Deux solutions

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, nulle en $x = \pm 1$.
- **Variations** : f **croît** sur $] -\infty; -1]$, **décroît** sur $[-1; 1]$, **croît** sur $[1; +\infty[$.
- **Extremums** : $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3 > 0$ (maximum local) et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$ (minimum local).
- **Limites** : $f \rightarrow -\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.
- **Sur chacune des trois branches monotones**, f change de signe : le corollaire du TVI donne **exactement une** racine par branche.
- **Conclusion** : l'équation a **trois** solutions réelles.
- **Localisation** : $f(-2) = -1 < 0$ et $f(-1) = 3 > 0$, donc une racine dans $] -2; -1[$; $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$, donc une dans $]0; 1[$; $f(2) = 3 > 0$, donc une dans $]1; 2[$.
- **Valeurs** : $\alpha_1 \approx -1,8794$, $\alpha_2 \approx 0,3473$, $\alpha_3 \approx 1,5321$.

Réponse. Trois solutions : le maximum local est > 0 et le minimum local < 0 .

Correction de l'exercice 7 - Bornes atteintes

- f est continue sur le **segment** $[0; 4]$: elle est bornée et **atteint ses bornes**.
- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.
- **Signe** : positive sur $[0; 1]$, négative sur $[1; 3]$, positive sur $[3; 4]$.
- **Valeurs à comparer** (extremums locaux **et** bornes) :
- $f(0) = 0$;

- $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$;
- $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$;
- $f(4) = 64 - 96 + 36 = 4$.
- **Maximum** : 4, atteint en $x = 1$ **et** $x = 4$.
- **Minimum** : 0, atteint en $x = 0$ **et** $x = 3$.
- **Méthode à retenir** : sur un segment, il faut **toujours** examiner les valeurs aux bornes en plus des points critiques — le maximum peut être au bord.

Réponse. Maximum 4 (en 1 et 4) ; minimum 0 (en 0 et 3).

Correction de l'exercice 8 - Fonction non continue

- a) - **Limite à gauche** : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 1 = 1$.
- **Valeur en 0 et limite à droite** : $f(0) = -2$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$.
 - Les deux limites latérales **diffèrent** ($1 \neq -2$) : f n'est **pas continue** en 0 — elle présente un **saut** d'amplitude 3.
- b) **Le TVI ne s'applique pas**, l'hypothèse de continuité étant violée. Et le défaut est bien réel :
- Sur $[-1 ; 0[$: $f(x) = x + 1$ décrit $[0 ; 1[$.
 - Sur $[0 ; 1]$: $f(x) = x^2 - 2$ décrit $[-2 ; -1]$.
 - **Image totale** : $[-2 ; -1] \cup [0 ; 1[$ — ce **n'est pas un intervalle**.
 - **Valeur manquante** : $f(-1) = 0$ et $f(1) = -1$, et pourtant f ne prend **jamais** la valeur $-0,5$, bien qu'elle soit comprise entre -1 et 0 .
 - **Conclusion** : une fonction continue sur un intervalle a pour image un **intervalle** ; ici le saut crée un « trou » de $] -1 ; 0[$ dans l'image.
 - **À retenir** : la continuité est une hypothèse **indispensable** du TVI, pas une formalité de rédaction.

Réponse. a) non (saut de 1 à -2) · b) non : $-0,5$ n'est jamais atteinte.

Correction de l'exercice 9 - Prolongement par continuité

- f n'est **pas définie** en 2 (dénominateur nul).
 - **Factorisation** : pour $x \neq 2$,
- $$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$
- **Limite** : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, **finie**.
 - **Prolongement** : en posant $\tilde{f}(2) = 4$, la fonction devient **continue** sur $\mathbb{R}$ — c'est la fonction affine $x \mapsto x+2$.
 - **Graphiquement** : la courbe de f est la droite $y = x+2$ **privée du point** $(2 ; 4)$; le prolongement « rebouche le trou ».
 - **Contre-exemple** : $g(x) = \frac{1}{x-2}$ n'admet **pas** de limite finie en 2 ($\pm\infty$ selon le côté) — aucun prolongement continu n'est possible.
 - **Critère** : le prolongement existe **si et seulement si** la limite existe et est **finie**.

Réponse. Oui : $\tilde{f}(2) = 4$, et $\tilde{f}(x) = x+2$.

Correction de l'exercice 10 - Suite récurrente et point fixe

- **Fonction d'itération** : $f(x) = \sqrt{x+2}$, **continue** sur $[-2 ; +\infty[$.

- **Théorème du point fixe** : si $u_n \rightarrow \ell$ et f est continue en ℓ , alors en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\ell = \sqrt{\ell + 2}$$

- **Résolution** : en élevant au carré (licite car $\ell \geq 0$), $\ell^2 = \ell + 2$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$.
- **Racines** : $\ell = 2$ ou $\ell = -1$.
- **Filtrage** : la suite est à termes **positifs** ($u_0 = 0$ et la racine est positive), donc $\ell \geq 0$: seule $\ell = 2$ convient.
- **Contrôles** : $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$; $u_2 \approx 1,848$; $u_3 \approx 1,962$; $u_4 \approx 1,990$ ✓ — la convergence vers 2 est nette.
- **Rôle de la continuité** : sans elle, on ne pourrait **pas** passer à la limite dans $f(u_n)$ — c'est exactement ce qu'apporte ce chapitre à l'étude des suites.

Réponse. $\ell = 2$ (la racine -1 est écartée par positivité).

Correction de l'exercice 11 - Nombre de solutions selon un paramètre

Soit $f(x) = x^3 - 3x$; on cherche les antécédents de k .

- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
- **Variations** : croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 1]$, croissante sur $[1 ; +\infty[$.
- **Extremums** : maximum local $f(-1) = -1 + 3 = 2$; minimum local $f(1) = 1 - 3 = -2$.
- **Limites** : $\mp\infty$ aux bornes.

Discussion.

- $k > 2$ ou $k < -2$: **une** solution (une seule branche est traversée).
- $k = 2$ ou $k = -2$: **deux** solutions (une racine double au niveau de l'extremum, plus une simple).
- $-2 < k < 2$: **trois** solutions (les trois branches sont traversées).
- **Contrôles** : $k = 0$ donne $x^3 = 3x$, soit $x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ — **trois** solutions ✓ ; $k = 2$ donne $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$, soit $x \in \{-1, 2\}$ — **deux** solutions ✓
- **Lecture graphique** : on compte les intersections de la courbe avec la **droite horizontale** $y = k$.

Réponse. $|k| > 2$: une solution · $|k| = 2$: deux · $|k| < 2$: trois.

Correction de l'exercice 12 - Continuité et composition

- **Domaine** : il faut $e^x - 1 \geq 0$, soit $e^x \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq 0$.
- Donc $D_f = [0 ; +\infty[$.
- **Continuité par composition** :
- $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions continues) ;
- elle est à valeurs dans $[0 ; +\infty[$ pour $x \geq 0$;
- $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$.
- La **composée de fonctions continues** étant continue, f est continue sur $[0 ; +\infty[$ ✓
- **Valeurs** : $f(0) = 0$; $f(1) = \sqrt{e-1} \approx 1,3108$; $f(2) \approx 2,5277$.
- **Limite en** $+\infty$: $+\infty$.
- **Point de rédaction** : il faut vérifier que l'image de la première fonction est bien **incluse** dans le domaine de la seconde — c'est la condition de la composition.

Réponse. $D_f = [0 ; +\infty[$; continuité par composition.

Correction de l'exercice 13 - Algorithme de balayage

Algorithme (balayage).

```
def f(x):
    return x * x - 3

x = 1.0
while f(x) < 0:
    x = x + 0.01
print(x - 0.01, x)
```

Analyse.

- **Validité** : f est continue, $f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 1 > 0$ — le TVI garantit une racine ; $f = 2x > 0$ sur $[1; 2]$ assure l'**unicité**.
- **Résultat** : $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.
- **Contrôles** : $1,73^2 = 2,9929 < 3$ et $1,74^2 = 3,0276 > 3$ ✓
- **Valeur exacte** : $\sqrt{3} \approx 1,7320508$ — bien dans l'encadrement ✓
- **Balayage contre dichotomie** : le balayage demande ici une centaine d'itérations, la dichotomie seulement 7 (car $2^{-7} < 0,01$). Le balayage est plus simple à écrire, la dichotomie bien plus rapide.

Réponse. $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

Correction de l'exercice 14 - Fonction continue et image d'un intervalle

- f est continue sur le **segment** $[-1; 2]$: son image est un **segment** $[m; M]$.
- **Minimum** : f atteint 0 en $x = 0$, et $x^2 \geq 0$ partout — donc $m = 0$.
- **Maximum** : les valeurs aux bornes sont $f(-1) = 1$ et $f(2) = 4$; le maximum est $M = 4$.
 $f([-1; 2]) = [0; 4]$
- **Pourquoi pas $[1; 4]$?** Parce que f n'est **pas monotone** sur $[-1; 2]$: elle décroît sur $[-1; 0]$ puis croît. L'image n'est donc pas l'intervalle entre les valeurs aux **bornes**.
- **Règle correcte** : l'image d'un segment par une fonction continue est $[\min f; \max f]$ — les extremums peuvent être **à l'intérieur**.
- **Cas particulier** : si f est **monotone**, alors l'image est bien l'intervalle entre $f(a)$ et $f(b)$.
- **Contrôle** : 0,5 est atteint en $x = \pm\sqrt{0,5} \approx \pm 0,707$, tous deux dans $[-1; 2]$ ✓

Réponse. $f([-1; 2]) = [0; 4]$: f n'est pas monotone sur cet intervalle.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : type bac

a) **Dérivée** : $f(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$.

- $e^x > 0$, donc f a le signe de $1 + x$: f **décroît** sur $] -\infty; -1]$ puis **croît** sur $[-1; +\infty[$.
- **Minimum** : $f(-1) = -e^{-1} - 1 \approx -1,368$.
- **Limites** : en $-\infty$, $xe^x \rightarrow 0$ (croissances comparées) donc $f \rightarrow -1$; en $+\infty$, $f \rightarrow +\infty$.

b) **Discussion par branche.**

- Sur $] -\infty; -1]$: f décroît de -1 (exclu) à $-1,368$ — elle reste **strictement négative**, donc **aucune** racine.
- Sur $[-1; +\infty[$: f est continue, **strictement croissante**, de $-1,368$ à $+\infty$ — le corollaire du TVI donne **une unique** racine α .

Encadrement.

- $f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$ et $f(1) = e - 1 \approx 1,718 > 0$, donc $\alpha \in]0; 1[$.
- $f(0,56) = 0,56 \times 1,7507 - 1 = -0,0196 < 0$ et $f(0,57) = 0,57 \times 1,7683 - 1 = 0,0079 > 0$.
- **Encadrement** : $0,56 < \alpha < 0,57$.
- **Valeur** : $\alpha \approx 0,5671$ (c'est la constante oméga, solution de $xe^x = 1$).

Réponse. b) Racine unique $\alpha \in]0,56; 0,57[$, soit $\alpha \approx 0,567$.