

Plaquette 2 - TVI — existence d'une solution

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Si f est **continue** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a; b]$.

$$f \text{ continue sur } [a; b] \text{ et } f(a) \leq k \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a; b], f(c) = k$$

Cas usuel : si $f(a)$ et $f(b)$ sont de **signes contraires**, f s'annule au moins une fois entre a et b .

Fonctions continues : polynômes, fonctions rationnelles (sur leur ensemble de définition), racine carrée, exponentielle, sinus, cosinus, et toutes leurs sommes, produits, quotients et composées.

Ce que le TVI ne dit pas :

- il ne donne **pas l'unicité** (il peut y avoir plusieurs solutions) ;
- il ne donne **pas la valeur** de la solution (on l'encadre ensuite) ;
- sans **continuité**, la conclusion peut être fausse ;
- si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, on **ne peut rien conclure**.

Version avec des limites : si f est continue sur $]a; b[$ avec $\lim_a f = -\infty$ et $\lim_b f = +\infty$, alors f prend toutes les valeurs réelles.

Correction de l'exercice 1 - Première application

On vérifie les **hypothèses du TVI** une par une.

- **Continuité :** f est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; 1]$.
- **Valeurs aux bornes :** $f(0) = 0 + 0 - 1 = -1$ et $f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$.
- **Encadrement de $k = 0$:** $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$.

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**,

$$\exists c \in [0; 1], f(c) = 0$$

- **Rédaction :** on cite le théorème **par son nom** et on vérifie **explicitement** ses deux hypothèses.
- **Valeur approchée** (calculatrice) : $c \approx 0,682$.

Réponse. f continue, $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$: au moins une solution dans $[0; 1]$.

Correction de l'exercice 2 - Au moins une, pas forcément une seule

a) $f(-2) = -8 + 6 = -2$ et $f(2) = 8 - 6 = 2$. f est un polynôme, donc continue, et 0 est compris entre -2 et 2.

Le TVI affirme qu'il existe **au moins une** solution dans $[-2; 2]$ — il ne dit pas combien.

b) On factorise :

$$x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

- Produit nul : $x = 0$, $x = \sqrt{3} \approx 1,73$ ou $x = -\sqrt{3}$.

- Il y a **trois** solutions dans $[-2; 2]$, bien visibles sur la courbe qui coupe trois fois l'axe des abscisses.
- **À retenir** : le TVI donne l'**existence** ; pour l'**unicité**, il faudra en plus la **stricte monotonie** (corollaire du TVI).

Réponse. a) Au moins une solution · b) trois solutions : $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 3 - Sans continuité, rien ne va plus

a) $f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1)$: 0 est bien compris entre les valeurs aux bornes.

b) f ne prend que les valeurs -1 et 1 : l'équation $f(x) = 0$ n'a **aucune** solution.

- Le TVI ne s'applique pas car f n'est **pas continue** en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq f(0) = 1$$

- La courbe fait un **saut** en 0 : on ne peut pas la tracer « sans lever le crayon », et elle franchit la valeur 0 sans jamais la prendre.
- **Leçon** : chaque hypothèse d'un théorème compte ; oublier la continuité mène à des conclusions fausses.

Réponse. Aucune solution : f n'est pas continue en 0.

Correction de l'exercice 4 - Cosinus et droite

On ramène l'équation à la forme $g(x) = 0$ en posant $g(x) = \cos x - x$.

- **Continuité** : g est la différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- **Valeurs aux bornes** : $g(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$ et

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$$

- 0 est compris entre $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $g(0)$.

D'après le TVI, il existe $c \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $\cos c = c$.

- **Pourquoi passer par g** : le TVI porte sur **une** fonction et une valeur k ; on regroupe tout d'un côté pour se ramener à $k = 0$.
- **Valeur approchée** : $c \approx 0,739$.

Réponse. $g(x) = \cos x - x$ continue, $g(0) = 1 > 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

Correction de l'exercice 5 - Exponentielle contre droite

On pose $g(x) = e^x + x - 3$: l'équation équivaut à $g(x) = 0$.

- **Continuité** : somme de la fonction exponentielle et d'une fonction affine, g est continue sur $[0; 1]$.
- **Bornes** :

$$g(0) = 1 + 0 - 3 = -2 < 0 \quad g(1) = e - 2 \approx 0,718 > 0$$

- $g(0)$ et $g(1)$ sont de **signes contraires**.

D'après le TVI, g s'annule au moins une fois sur $[0; 1]$: l'équation $e^x = 3 - x$ a au moins une solution dans cet intervalle.

- **Justification de $e - 2 > 0$** : $e \approx 2,718 > 2$.

— **Graphiquement** : c'est l'abscisse du point d'intersection de la courbe de l'exponentielle et de la droite $y = 3 - x$; ici $c \approx 0,79$.

Réponse. $g(0) = -2 < 0 < g(1) = e - 2$: au moins une solution.

Correction de l'exercice 6 - Localiser plusieurs racines

a) On calcule chaque image :

x	-3	-2	0	1	2	3
$f(x)$	-7	6	2	-3	-2	11

(par exemple $f(-3) = -27 + 18 + 2 = -7$ et $f(3) = 27 - 18 + 2 = 11$).

b) f est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme). On repère les **changements de signe** :

- entre -3 et -2 : $f(-3) < 0 < f(-2)$;
- entre 0 et 1 : $f(0) > 0 > f(1)$;
- entre 2 et 3 : $f(2) < 0 < f(3)$.

Le TVI, appliqué sur chacun de ces trois intervalles **disjoints**, donne trois solutions **distinctes** :

$$c_1 \in [-3; -2] \quad c_2 \in [0; 1] \quad c_3 \in [2; 3]$$

- Un polynôme de degré 3 a au plus 3 racines : il y en a donc **exactement trois**.
- Valeurs approchées : $c_1 \approx -2,60$, $c_2 \approx 0,34$, $c_3 \approx 2,26$.

Réponse. Trois solutions, dans $[-3; -2]$, $[0; 1]$ et $[2; 3]$.

Correction de l'exercice 7 - Le point fixe

On pose $g(x) = f(x) - x$; chercher c tel que $f(c) = c$ revient à résoudre $g(c) = 0$.

- **Continuité** : g est la différence de deux fonctions continues sur $[0; 1]$.
- **En 0** : $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ (car $f(0) \in [0; 1]$).
- **En 1** : $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (car $f(1) \leq 1$).

Donc $g(1) \leq 0 \leq g(0)$, et d'après le TVI :

$$\exists c \in [0; 1], g(c) = 0, \text{ soit } f(c) = c$$

- **Interprétation graphique** : la courbe de f part d'un point au-dessus (ou sur) la diagonale $y = x$ et arrive en dessous (ou dessus) : elle la **coupe** forcément.
- **Remarque** : les inégalités sont larges ; si $g(0) = 0$, $c = 0$ convient directement.

Réponse. $g(0) \geq 0 \geq g(1)$ et g continue : f a un point fixe.

Correction de l'exercice 8 - Le randonneur

On note $m(t)$ et $d(t)$ la distance au point de départ (en bas), le samedi et le dimanche, à l'heure $t \in [8; 16]$. Soit L la longueur du chemin.

- $m(8) = 0$, $m(16) = L$ (il monte) ; $d(8) = L$, $d(16) = 0$ (il descend).
- Les fonctions m et d sont **continues** : on ne se téléporte pas.

On pose $g(t) = m(t) - d(t)$, continue sur $[8; 16]$:

$$g(8) = 0 - L = -L < 0 \quad g(16) = L - 0 = L > 0$$

D'après le TVI, il existe $t_0 \in [8; 16]$ tel que $g(t_0) = 0$, c'est-à-dire $m(t_0) = d(t_0)$: à l'heure t_0 , il est au même endroit les deux jours.

- **Image** : si deux randonneurs faisaient les deux trajets **le même jour**, ils se croiseraient forcément.
- Le théorème garantit l'existence de ce moment, sans dire **quand**.

Réponse. $g = m - d$ est continue, $g(8) < 0 < g(16)$: elle s'annule.

Correction de l'exercice 9 - Image d'un intervalle

a) $f(-1) = 1$ et $f(2) = 4$. f est continue, donc le TVI garantit que f prend **toutes** les valeurs de $[1; 4]$.

b) Le TVI ne donne qu'une partie de l'image. On étudie les variations :

- f est décroissante sur $[-1; 0]$, de 1 à 0 ;
- f est croissante sur $[0; 2]$, de 0 à 4.

L'ensemble des valeurs prises est donc

$$f([-1; 2]) = [0; 4]$$

- Les valeurs de $[0; 1[$ sont atteintes **mais** ne sont pas entre $f(-1)$ et $f(2)$: le TVI ne les voyait pas.
- **À retenir** : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, mais ses bornes sont le **minimum** et le **maximum** de f , pas forcément $f(a)$ et $f(b)$.

Réponse. a) Toutes les valeurs de $[1; 4]$ · b) l'image est $[0; 4]$.

Correction de l'exercice 10 - Une valeur k non nulle

Ici $k = 2$; on applique le TVI directement, sans changer de fonction.

- **Continuité** : f est le produit de $x \mapsto x$ et de l'exponentielle, deux fonctions continues.
- **Bornes** : $f(0) = 0 \times e^0 = 0$ et $f(1) = 1 \times e = e \approx 2,718$.
- **Encadrement** : $f(0) = 0 \leq 2 \leq e = f(1)$.

$$\exists c \in [0; 1], c e^c = 2$$

- **Variante** équivalente : poser $g(x) = x e^x - 2$, avec $g(0) = -2 < 0$ et $g(1) = e - 2 > 0$.
- **Valeur approchée** : $c \approx 0,853$.

Réponse. f continue, $0 \leq 2 \leq e$: au moins une solution.

Correction de l'exercice 11 - Sur un intervalle ouvert

a) En 0^+ : $e^x \rightarrow 1$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Et $f(1) = e - 1 \approx 1,718 > 0$.

b) $f(0,5) = e^{0,5} - 2 \approx 1,649 - 2 = -0,351 < 0$.

- **Continuité** : f est continue sur $]0; +\infty[$, donc sur $[0,5; 1]$.
- $f(0,5) < 0 < f(1)$.

D'après le TVI, f s'annule au moins une fois sur $[0,5; 1]$.

- **Pourquoi calculer** $f(0,5)$: le TVI s'applique sur un intervalle **fermé** $[a; b]$. La limite $-\infty$ en 0 indique qu'un tel a existe ; il faut ensuite en exhiber un.
- La solution vérifie $e^c = \frac{1}{c}$, soit $c e^c = 1$: $c \approx 0,567$.

Réponse. $f(0,5) \approx -0,35 < 0 < f(1) \approx 1,72$: une solution dans $[0,5; 1]$.

Correction de l'exercice 12 - Un compteur de vitesse

a) On applique le TVI à v sur $[0; 20]$:

- v est **continue** (une vitesse ne « saute » pas d'une valeur à une autre) ;
- $v(0) = 0$ et $v(20) = 130$, et $0 \leq 90 \leq 130$.

$$\exists t_0 \in [0; 20], v(t_0) = 90$$

b) **Non**. Le TVI ne garantit pas l'unicité : la voiture a pu dépasser 90 km/h, ralentir, puis réaccélérer, et passer ainsi **plusieurs fois** par 90 km/h.

- Pour conclure à l'unicité, il faudrait savoir que v est **strictement croissante** (accélération continue) — c'est le corollaire du TVI.
- **Idée physique** : la continuité est une hypothèse de modélisation, justifiée par l'inertie du véhicule.

Réponse. a) Oui, par le TVI · b) Non, sauf si v est strictement croissante.

Correction de l'exercice 13 - Même signe aux bornes

- **Bornes** : $f(-2) = 4 - 1 = 3$ et $f(2) = 3$, tous deux **positifs**.
- **Zéros** : $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$, deux valeurs de $[-2; 2]$.

$$f(-1) = f(1) = 0$$

L'affirmation de l'élève est donc **fausse** : f s'annule deux fois alors que $f(-2)$ et $f(2)$ sont de même signe.

- **Ce que dit vraiment le TVI** : signes contraires $\Rightarrow$ au moins un zéro. La **réci-proque** est fausse : un zéro n'entraîne pas des signes contraires aux bornes.
- **Contre-exemple extrême** : $x \mapsto x^2$ sur $[-1; 1]$ s'annule en 0 sans jamais changer de signe.

Réponse. Faux : $f(-2) = f(2) = 3 > 0$ mais $f(\pm 1) = 0$.

Correction de l'exercice 14 - Affiner une localisation

a) f est un polynôme, donc continue. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$: par le TVI, f s'annule au moins une fois sur $[0; 1]$.

b) On calcule, avec $0,7^5 = 0,168\,07$ et $0,8^5 = 0,327\,68$:

$$f(0,7) = 0,168\,07 + 0,7 - 1 = -0,131\,93 < 0$$

$$f(0,8) = 0,327\,68 + 0,8 - 1 = 0,127\,68 > 0$$

- On applique à nouveau le TVI, cette fois sur $[0,7; 0,8]$: il y a une solution dans cet intervalle.
- **Unicité** : $f(x) = 5x^4 + 1 > 0$, f est strictement croissante ; la solution est donc unique, et $0,7 < \alpha < 0,8$.
- En recommençant avec des pas de 0,01, on obtient $\alpha \approx 0,755$.

Réponse. $f(0,7) < 0 < f(0,8)$: une solution dans $[0,7; 0,8]$.

Correction de l'exercice 15 - Deux courbes qui se croisent

a) Les courbes se coupent au point d'abscisse x si $f(x) = g(x)$. On pose

$$h(x) = e^{-x} - x$$

- **Continuité** : h est la différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- **Bornes** : $h(0) = 1 - 0 = 1 > 0$ et $h(1) = e^{-1} - 1 \approx -0,632 < 0$.

D'après le TVI, il existe $c \in [0 ; 1]$ tel que $h(c) = 0$, soit $e^{-c} = c$: les courbes se coupent au point $(c ; c)$.

b) Sur la figure, l'intersection a une abscisse proche de 0,57 (la valeur précise est $c \approx 0,567$).

— **Méthode générale** : l'intersection de deux courbes se ramène au **zéro de la différence** $f - g$.

Réponse. $h = f - g$ vérifie $h(0) > 0 > h(1)$: intersection d'abscisse $c \approx 0,57$.