

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : équations, dichotomie et fonctions par morceaux

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On justifie la **continuité**, on applique le **TVI** (existence) puis la **stricte monotonie** (unicité), on encadre la solution par **dichotomie** ou balayage, et on raccorde des fonctions définies par morceaux.

Exercice 1 - Continuité d'une fonction par morceaux

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 - TVI et corollaire

Montrer que l'équation $x^3 + 2x - 5 = 0$ admet une **unique** solution réelle, et l'encadrer entre deux entiers consécutifs.

Exercice 3 - Dichotomie

Soit $f(x) = x^3 - x - 3$. Montrer que f s'annule sur $[1 ; 2]$ et donner un encadrement de la racine d'amplitude 0,25 par dichotomie.

Exercice 4 - Équation avec exponentielle

Montrer que l'équation $e^x = 2 - x$ admet une unique solution, puis l'encadrer à 0,1 près.

Exercice 5 - Équation avec logarithme

Montrer que $\ln x = 3 - x$ admet une unique solution sur $]0 ; +\infty[$ et l'encadrer entre deux entiers.

Exercice 6 - Deux solutions

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$, en justifiant.

Exercice 7 - Bornes atteintes

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ sur $[0 ; 4]$. Déterminer son maximum et son minimum.

Exercice 8 - Fonction non continue

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) f est-elle continue en 0 ?
b) Le TVI s'applique-t-il sur $[-1 ; 1]$? Illustrer.

Exercice 9 - Prolongement par continuité

La fonction $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

Exercice 10 - Suite récurrente et point fixe

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Sachant que (u_n) converge, déterminer sa limite.

Exercice 11 - Nombre de solutions selon un paramètre

Discuter, selon k , le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x = k$.

Exercice 12 - Continuité et composition

Justifier la continuité de $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ sur son domaine, et déterminer ce domaine.

Exercice 13 - Algorithme de balayage

Écrire un algorithme donnant un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution de $x^2 = 3$ sur $[1 ; 2]$, et donner le résultat.

Exercice 14 - Fonction continue et image d'un intervalle

Soit $f(x) = x^2$ sur $[-1 ; 2]$. Déterminer $f([-1 ; 2])$, puis expliquer pourquoi l'image n'est pas $[f(-1) ; f(2)]$.

Exercice 15 - Synthèse : type bac

Soit $f(x) = xe^x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Étudier les variations de f .
b) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et l'encadrer à 0,01 près.