

Plaquette 2 - TVI — existence d'une solution

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Pour prouver qu'une équation $f(x) = k$ a **au moins une** solution sur $[a; b]$, on vérifie les **deux hypothèses** du théorème des valeurs intermédiaires : f est **continue** sur $[a; b]$, et k est **compris entre** $f(a)$ et $f(b)$. On ramène souvent l'équation à la forme $g(x) = 0$ en posant $g = f - k$ ou $g = f - h$.

Exercice 1 - Première application

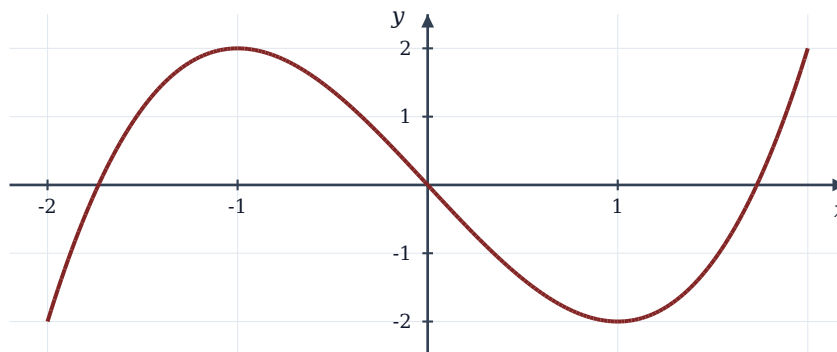
Soit $f(x) = x^3 + x - 1$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 2 - Au moins une, pas forcément une seule

On a tracé la courbe de $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 2]$.

- Calculer $f(-2)$ et $f(2)$. Que permet d'affirmer le TVI pour l'équation $f(x) = 0$?
- Résoudre exactement $f(x) = 0$. Combien y a-t-il de solutions ?

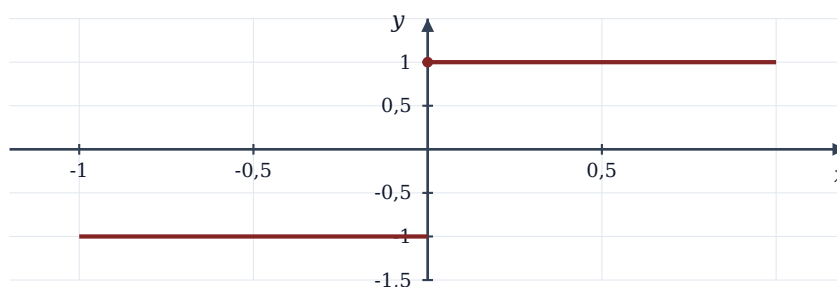


Courbe de f sur $[-2; 2]$

Exercice 3 - Sans continuité, rien ne va plus

Soit f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.

- Comparer $f(-1)$, 0 et $f(1)$.
- L'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une solution ? Quelle hypothèse du TVI n'est pas satisfaite ?



Courbe de f : un saut en 0

Exercice 4 - Cosinus et droite

Démontrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 5 - Exponentielle contre droite

Démontrer que l'équation $e^x = 3 - x$ possède au moins une solution dans $[0 ; 1]$.

Exercice 6 - Localiser plusieurs racines

Soit $f(x) = x^3 - 6x + 2$.

- Compléter le tableau de valeurs de f pour $x = -3, -2, 0, 1, 2, 3$.
- En déduire que l'équation $f(x) = 0$ a au moins trois solutions, et les localiser.

Exercice 7 - Le point fixe

Soit f une fonction **continue** sur $[0 ; 1]$, à valeurs dans $[0 ; 1]$ (pour tout $x \in [0 ; 1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$).

Démontrer qu'il existe $c \in [0 ; 1]$ tel que $f(c) = c$. On pourra étudier $g(x) = f(x) - x$.

Exercice 8 - Le randonneur

Un randonneur monte au refuge un samedi, de 8 h à 16 h. Le dimanche, il redescend par le même chemin, de 8 h à 16 h, à une allure quelconque (il peut s'arrêter, accélérer...).

Démontrer qu'il existe une heure à laquelle il se trouve **au même endroit** les deux jours.

Exercice 9 - Image d'un intervalle

Soit $f(x) = x^2$ sur $[-1 ; 2]$.

- Calculer $f(-1)$ et $f(2)$. Quelles valeurs le TVI garantit-il que f prend ?
- Déterminer l'ensemble de **toutes** les valeurs prises par f sur $[-1 ; 2]$.

Exercice 10 - Une valeur k non nulle

Soit $f(x) = x e^x$ sur $[0 ; 1]$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans $[0 ; 1]$.

Exercice 11 - Sur un intervalle ouvert

Soit $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et calculer $f(1)$.
- Calculer $f(0,5)$, puis démontrer que f s'annule sur $[0,5 ; 1]$.

Exercice 12 - Un compteur de vitesse

Une voiture démarre à l'arrêt à $t = 0$ et roule à 130 km/h à $t = 20$ s. On admet que sa vitesse $v(t)$ est une fonction continue du temps.

- Justifier qu'à un instant de $[0 ; 20]$, la voiture a roulé exactement à 90 km/h.
- Peut-on affirmer qu'elle n'a roulé à 90 km/h qu'une seule fois ?

Exercice 13 - Même signe aux bornes

Un élève affirme : « si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, alors f ne s'annule pas sur $[a ; b]$ ».

Étudier $f(x) = x^2 - 1$ sur $[-2 ; 2]$ et conclure.

Exercice 14 - Affiner une localisation

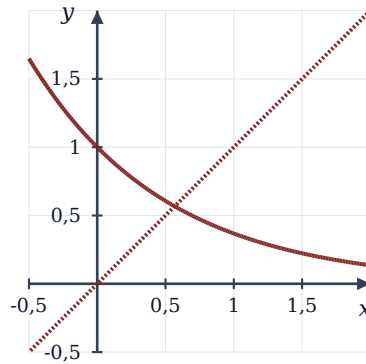
Soit $f(x) = x^5 + x - 1$.

- Démontrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[0 ; 1]$.
- En calculant $f(0,7)$ et $f(0,8)$, donner un intervalle d'amplitude 0,1 contenant une solution.

Exercice 15 - Deux courbes qui se croisent

On a tracé les courbes de $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = x$.

- Démontrer que les deux courbes se coupent en au moins un point d'abscisse comprise entre 0 et 1.
- Lire une valeur approchée de cette abscisse.



Courbe de f (trait plein) et droite $y = x$ (pointillé)