

Plaquette 2 - Équations cartésiennes de plans

Droites et plans dans l'espace — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vecteur normal. Un vecteur $\vec{n}$ non nul est normal au plan P s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P . Dans un repère **orthonormé** :

$$\vec{n}(a; b; c) \perp \vec{u}(x; y; z) \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$$

Équation cartésienne. Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

(on trouve d avec les coordonnées de A). Réciproquement, un tel ensemble est un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

Plans particuliers : $z = k$ (plan horizontal), $x = 0$ (plan (yOz)), $ax + by + d = 0$ (plan vertical, parallèle à l'axe des cotes).

Positions : deux plans sont **parallèles** si leurs vecteurs normaux sont colinéaires ; **perpendiculaires** si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux ($\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$).

Droite perpendiculaire à un plan : son vecteur directeur est colinéaire à $\vec{n}$.

Correction de l'exercice 1 - Équation à partir d'un point et d'un vecteur normal

Le plan a une équation de la forme

$$2x - y + 3z + d = 0$$

(les coefficients de x, y, z sont les coordonnées de $\vec{n}$).

$$- A \in P : 2 \times 1 - 2 + 3 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow -3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3.$$

$$- P: 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

Justification : $M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) - (y - 2) + 3(z + 1) = 0$, ce qui redonne la même équation.

$$- \text{Vérification} : 2 - 2 - 3 + 3 = 0 \checkmark$$

Réponse. $P: 2x - y + 3z + 3 = 0$.

Correction de l'exercice 2 - Lire une équation de plan

a) Les coefficients de x, y, z donnent un vecteur normal (le coefficient de y est nul) :

$$\vec{n}(3; 0; -1)$$

b) On choisit deux coordonnées et on calcule la troisième :

$$- x = 0, y = 0 : -z + 5 = 0, \text{ soit } (0; 0; 5);$$

$$- x = 1, y = 7 : 3 - z + 5 = 0, \text{ soit } (1; 7; 8).$$

c) L'équation ne contient pas y : si $(x; y; z) \in P$, alors $(x; y'; z) \in P$ pour tout y' . Le plan contient toutes les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par ses points : il est **parallèle à l'axe** (Oy) .

$$- \text{Vérification} : \vec{n} \cdot \vec{j} = 0 \checkmark$$

Réponse. a) $\vec{n}(3; 0; -1)$ · b) $(0; 0; 5)$ et $(1; 7; 8)$ · c) parallèle à (Oy) .

Correction de l'exercice 3 - Un point est-il dans le plan ?

Un point appartient au plan si et seulement si ses coordonnées **vérifient l'équation** :

$$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow x + 2y - z = 4$$

— $A : 1 + 4 - 1 = 4 \checkmark, A \in P.$

— $B : 0 + 0 - 4 = -4 \neq 4 \text{ ✗}, B \notin P.$

— $C : 4 + 2 - 2 = 4 \checkmark, C \in P.$

— **Remarque** : $B(0; 0; 4)$ n'est pas dans P , mais $(0; 0; -4)$ l'est ; attention aux signes.

— **Conséquence** : A et C étant dans P , toute la droite (AC) est contenue dans P .

Réponse. A et C oui, B non.

Correction de l'exercice 4 - Un plan vertical

a) Le coefficient de z est nul :

$$\vec{n}(1; 1; 0)$$

$\vec{n}$ est horizontal, donc le plan contient la direction verticale $\vec{k}(0; 0; 1)$ (puisque $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$) : c'est un plan **vertical**, parallèle à l'axe des cotes.

b) **Axe des abscisses** ($y = z = 0$) : $x = 2$, point $A(2; 0; 0)$.

Axe des ordonnées : $B(0; 2; 0)$.

Axe des cotes ($x = y = 0$) : $0 = 2$, impossible — le plan est parallèle à cet axe et ne le coupe pas.

— **Image** : c'est un « mur » dont la trace au sol est la droite d'équation $x + y = 2$.

Réponse. $\vec{n}(1; 1; 0)$; plan vertical coupant les axes en $(2; 0; 0)$ et $(0; 2; 0)$.

Correction de l'exercice 5 - Traces sur les axes et volume

a) Sur chaque axe, deux coordonnées sont nulles :

— $y = z = 0 : 2x = 6, A(3; 0; 0) ;$

— $x = z = 0 : 3y = 6, B(0; 2; 0) ;$

— $x = y = 0 : 6z = 6, C(0; 0; 1).$

b) Le tétraèdre a pour base le triangle rectangle OAB (dans le plan horizontal) et pour hauteur OC :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 2}{2} \times 1 = 1$$

— **Remarque** : en divisant par 6, l'équation s'écrit $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$; on y lit directement les traces sur les axes.

Réponse. $A(3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 1)$; $V = 1$.

Correction de l'exercice 6 - Le plan passant par trois points des axes

a) $\overrightarrow{AB}(-2; 4; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; 0; 4)$ ne sont pas colinéaires. On vérifie l'orthogonalité avec chacun :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -4 + 4 + 0 = 0 \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 + 0 + 4 = 0$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : il est **normal** à (ABC) .

b) Équation $2x + y + z + d = 0$; avec $A : 4 + d = 0, d = -4$.

— $(ABC): 2x + y + z - 4 = 0$.

— **Vérification** : $B : 4 - 4 = 0 \checkmark$; $C : 4 - 4 = 0 \checkmark$

Réponse. $(ABC): 2x + y + z - 4 = 0$.

Correction de l'exercice 7 - Trouver un vecteur normal

a) $\overrightarrow{AB}(1; 0; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(0; 2; 1)$. On écrit que $\vec{n}$ est orthogonal aux deux :

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

— On choisit $a = 2$ (pour éviter les fractions) : $\vec{n}(2; -1; 2)$.

b) Équation $2x - y + 2z + d = 0$; avec $A : 2 - 1 + 2 + d = 0, d = -3$.

— $(ABC): 2x - y + 2z - 3 = 0$.

— **Vérification** : $B : 4 - 1 + 0 - 3 = 0 \checkmark$; $C : 2 - 3 + 4 - 3 = 0 \checkmark$

— **Remarque** : le système a une infinité de solutions (tous les vecteurs normaux sont colinéaires) ; on en choisit une non nulle.

Réponse. a) $\vec{n}(2; -1; 2)$ · b) $2x - y + 2z - 3 = 0$.

Correction de l'exercice 8 - Un plan parallèle

a) $1 - 2 + 1 = 0 \neq 5 : M \notin P$.

b) Deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires ; on garde $\vec{n}(1; -2; 1)$:

$$P: x - 2y + z + d = 0$$

— Avec $M : 1 - 2 + 1 + d = 0$, donc $d = 0$.

— $P: x - 2y + z = 0$ (il passe par l'origine).

— **À retenir** : des plans parallèles ont des équations qui ne diffèrent que par la **constante** (à un facteur près).

Réponse. $P: x - 2y + z = 0$.

Correction de l'exercice 9 - Un plan perpendiculaire à une droite

Un plan perpendiculaire à une droite a pour vecteur normal un vecteur directeur de cette droite :

$$\vec{n} = \vec{u}(1; -1; 3)$$

— Équation : $x - y + 3z + d = 0$.

— Avec $A : 0 - 1 + 6 + d = 0$, donc $d = -5$.

— $P: x - y + 3z - 5 = 0$.

— **Point d'intersection avec D** (bonus) :

$$(1+t) + t + 3(3+3t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 11t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{11} ; \text{c'est le pied de la perpendiculaire.}$$

— **Vérification** : A vérifie l'équation $\checkmark$

Réponse. $P: x - y + 3z - 5 = 0$.

Correction de l'exercice 10 - Un plan du cube

a) $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$: chacun a une coordonnée égale à 1 et les autres nulles, donc $x + y + z = 1$ ✓

Les trois points ne sont pas alignés et vérifient l'équation d'un plan : c'est une équation de (BDE) ,

$$(BDE): x + y + z - 1 = 0$$

b) Un vecteur normal de (BDE) est $\vec{n}(1; 1; 1)$, et $\vec{AG}(1; 1; 1) = \vec{n}$.

— La droite (AG) est dirigée par un vecteur normal au plan : elle est **perpendiculaire** à (BDE) .

— **Bonus** : (AG) coupe (BDE) au point $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, centre de gravité du triangle BDE .

Réponse. $(BDE): x + y + z - 1 = 0$; $\vec{AG} = \vec{n}$, donc $(AG) \perp (BDE)$.

Correction de l'exercice 11 - Le plan diagonal du cube

a) $A(0; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $G(1; 1; 1)$. On cherche $\vec{n}(a; b; c)$ orthogonal à $\vec{AC}(1; 1; 0)$ et $\vec{AG}(1; 1; 1)$:

$$a + b = 0 \quad a + b + c = 0$$

— D'où $c = 0$ et $b = -a$: $\vec{n}(1; -1; 0)$.

— Le plan passe par l'origine A : $(ACG): x - y = 0$.

b) $E(0; 0; 1)$: $0 - 0 = 0$ ✓, $E \in (ACG)$ — c'est le plan du rectangle $ACGE$.

$B(1; 0; 0)$: $1 - 0 = 1 \neq 0$, $B \notin (ACG)$.

— **Interprétation** : $x = y$ décrit les points « à égale distance » des faces $(ADHE)$ et $(ABFE)$; c'est un plan de symétrie du cube.

Réponse. a) $(ACG): x - y = 0$ · b) E oui, B non.

Correction de l'exercice 12 - Plans parallèles ou non

On compare les **vecteurs normaux** :

$$\vec{n}_P(2; -1; 4) \quad \vec{n}_Q(-4; 2; -8) \quad \vec{n}_R(1; 1; -1)$$

a) $\vec{n}_Q = -2\vec{n}_P$: les plans sont **parallèles**.

— Confondus ? En multipliant l'équation de P par -2 : $-4x + 2y - 8z = -2$, qui diffère de $Q (= 3)$. Les plans sont **strictement parallèles**.

b) $\vec{n}_R$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}_P$ (rapports $\frac{1}{2}$ et -1 différents) : P et R sont **sécants** (leur intersection est une droite).

— **Remarque** : $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = 2 - 1 - 4 = -3 \neq 0$; ils ne sont pas perpendiculaires non plus.

Réponse. a) strictement parallèles · b) sécants.

Correction de l'exercice 13 - Plans perpendiculaires

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont **orthogonaux** :

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$$

— $\vec{n}_P(1; 2; -1)$ et $\vec{n}_Q(3; -1; 1)$.

— $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 \times 3 + 2 \times (-1) + (-1) \times 1 = 3 - 2 - 1 = 0$ ✓

Les plans sont **perpendiculaires**.

- **Image** : comme un mur et le sol, ou deux murs qui se rencontrent en angle droit.
- **Attention** : deux plans perpendiculaires ne sont pas « orthogonaux » au sens où toute droite de l'un serait orthogonale à toute droite de l'autre (leur droite d'intersection est dans les deux).

Réponse. $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$: plans perpendiculaires.

Correction de l'exercice 14 - Rendre deux plans perpendiculaires

Il faut que les vecteurs normaux soient orthogonaux :

$$\vec{n}_m(m; 2; -1) \cdot \vec{n}_Q(1; -1; 4) = 0$$

- $m \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times 4 = m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 6$.

Pour $m = 6$, $P_6: 6x + 2y - z = 1$ est perpendiculaire à Q .

- **Vérification** : $6 - 2 - 4 = 0 \checkmark$
- **Remarque** : aucune valeur de m ne rend les plans parallèles, car $\vec{n}_m$ et $\vec{n}_Q$ ont leurs coordonnées 2 et -1 dans des rapports incompatibles (-2 et $-\frac{1}{4}$).

Réponse. $m = 6$.

Correction de l'exercice 15 - La face d'une pyramide

a) $\overrightarrow{BS}(-1; 1; 3)$ et $\overrightarrow{BC}(0; 2; 0)$. On cherche $\vec{n}(a; b; c)$:

$$-a + b + 3c = 0 \quad 2b = 0$$

- $b = 0$, puis $a = 3c$: $\vec{n}(3; 0; 1)$.
- Équation $3x + z + d = 0$; avec B : $6 + d = 0$, $d = -6$.
- $(SBC): 3x + z - 6 = 0$.

Vérification : S : $3 + 3 - 6 = 0 \checkmark$; C : $6 + 0 - 6 = 0 \checkmark$

b) $3 \times \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 6 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - 6 = 0 \checkmark$: M est dans le plan (SBC) — c'est le milieu de la hauteur de la face issue de S .

Réponse. a) $(SBC): 3x + z - 6 = 0$ · b) oui.