

Plaquette 4 - Intersections — problèmes type bac

Droites et plans dans l'espace — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Représentation paramétrique d'une droite : $M = A + t\vec{u}$.

Équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$: $ax + by + cz + d = 0$.

Intersection droite-plan : on remplace x, y, z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$$

Intersection de deux plans (sécants) : on résout le système en prenant une inconnue comme paramètre.

Intersection de trois plans : système 3×3 ; en général un unique point.

Projeté orthogonal H de M sur P : intersection de P avec la droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$. Le **symétrique** de M est $M' = 2H - M$.

Section plane d'un solide : on cherche les points d'intersection du plan avec les **arêtes** ; si deux plans sont parallèles, un troisième plan les coupe selon deux droites **parallèles**.

Vérifier : un point trouvé doit vérifier **toutes** les équations des objets auxquels il appartient.

Correction de l'exercice 1 - Une droite traverse un triangle du cube

a) $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $J\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, donc $\overrightarrow{IJ}\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$:

$$(IJ): \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{2} \\ z = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b) **Substitution** dans $x + y + z = 1$: $t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} - \frac{t}{2} = 1$, soit $t = \frac{1}{2}$.

$$- L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

Dans le triangle ? Les points du triangle BDE sont ceux du plan dont les trois coordonnées sont **positives** (combinaisons de B, D, E à coefficients positifs de somme 1). Ici, les coordonnées $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ sont positives : L est **à l'intérieur** du triangle.

Réponse. a) $\left(t; \frac{t}{2}; \frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)$. b) $L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, intérieur au triangle.

Correction de l'exercice 2 - Un tétraèdre et une droite issue de l'origine

a) $A : 4 = 4 \checkmark$; $B : 4 = 4 \checkmark$; $C : 2 \times 2 = 4 \checkmark$. Les points ne sont pas alignés : c'est une équation de (ABC) .

b) **Substitution** :

$$t + t + 2t = 4 \Leftrightarrow t = 1$$

$K(1; 1; 1)$.

c) Un vecteur normal est $\vec{n}(1; 1; 2)$; $(1; 1; 1)$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$. La droite D coupe le plan, mais **pas** perpendiculairement.

— **Remarque** : la perpendiculaire à (ABC) issue de O serait dirigée par $(1; 1; 2)$; elle couperait le plan en $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Réponse. b) $K(1; 1; 1)$ · c) non, le vecteur normal est $(1; 1; 2)$.

Correction de l'exercice 3 - Où une droite traverse-t-elle un plan ?

a) $\overrightarrow{AB}(2; -2; -4)$:

$$(AB): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b) **Substitution** : $2t + 2 - 2t + 4 - 4t = 3 \Leftrightarrow 6 - 4t = 3 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$.

— $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$.

— $t = \frac{3}{4} \in [0; 1]$: I est **sur le segment** $[AB]$, aux trois quarts en partant de A .

— **Interprétation** : A et B sont de part et d'autre du plan ($0 + 2 + 4 = 6 > 3$ et $2 < 3$), donc le segment le traverse forcément.

Réponse. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$, sur $[AB]$ ($t = \frac{3}{4}$).

Correction de l'exercice 4 - Projeté et symétrique

a) La droite passant par M et dirigée par $\vec{n}(1; 1; 1)$ a pour représentation $(3 + t; 3 + t; 3 + t)$. **Substitution** :

$$3(3 + t) = 3 \Leftrightarrow t = -2$$

— $H(1; 1; 1)$.

— **Vérification** : $1 + 1 + 1 = 3$ ✓

b) H est le milieu de $[MM']$:

— $M' = 2H - M = (2 - 3; 2 - 3; 2 - 3) = (-1; -1; -1)$.

Distance : $MH = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$.

— **Contrôle** : M' vérifie $-3 \neq 3$, il n'est pas dans le plan, et il est bien à la distance $2\sqrt{3}$ de l'autre côté ✓

Réponse. $H(1; 1; 1)$, $M'(-1; -1; -1)$, distance $2\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 5 - L'intersection de deux plans du cube

a) On pose $x = t$; (ACG) donne $y = t$, et (BDE) donne $z = 1 - 2t$:

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b) $E(0; 0; 1)$: $t = 0$ ✓

$I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$: $t = \frac{1}{2}$ donne $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ ✓

- $\Delta = (EI)$.
- **Vérification géométrique** : E et I appartiennent aux deux plans (I est le milieu de $[BD]$, donc dans (BDE) ; il est aussi sur $[AC]$, donc dans (ACG)).

Réponse. $\Delta: (t; t; 1 - 2t)$, c'est la droite (EI) .

Correction de l'exercice 6 - Couper une pyramide

a) $(SB) : S + t\overrightarrow{SB}$ avec $\overrightarrow{SB}(1; -1; -3)$, soit $(1 + t; 1 - t; 3 - 3t)$.

$$3 - 3t = h \Leftrightarrow t = 1 - \frac{h}{3}$$

- Point $N\left(2 - \frac{h}{3}; \frac{h}{3}; h\right)$, qui est bien sur l'arête car $t \in [0; 1]$.

b) Par symétrie, la section est un **carré** ; son côté est l'écart entre les abscisses des points sur $[SA]$ et $[SB]$ à la même hauteur. Sur $[SA]$, le même calcul donne l'abscisse $\frac{h}{3}$.
Donc

$$\text{— côté} = 2 - \frac{h}{3} - \frac{h}{3} = 2 - \frac{2h}{3} = 2\left(1 - \frac{h}{3}\right);$$

$$\text{— aire} = 4\left(1 - \frac{h}{3}\right)^2.$$

- **Contrôle** : $h = 0$ donne l'aire de la base, 4 ; $h = 3$ donne 0 (au sommet) ; $h = 1,5$ donne 1 ✓

Réponse. a) $N\left(2 - \frac{h}{3}; \frac{h}{3}; h\right)$ · b) côté $2\left(1 - \frac{h}{3}\right)$, aire $4\left(1 - \frac{h}{3}\right)^2$.

Correction de l'exercice 7 - Quatre points coplanaires

a) $\overrightarrow{AB}(1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(0; 2; 1)$ ne sont pas colinéaires : A, B, C définissent un plan. Et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 - 1 + 0 = 0 \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 - 2 + 2 = 0$$

$\vec{n}$ est normal au plan.

b) Équation $x - y + 2z + d = 0$; avec $A : 1 - 0 + 2 + d = 0, d = -3$.

- $(ABC): x - y + 2z - 3 = 0$.
- $D : 3 - 2 + 2 - 3 = 0$ ✓, donc $D \in (ABC)$: les quatre points sont **coplanaires**.
- **Comparaison** : avec les vecteurs, il aurait fallu écrire $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$; avec l'équation du plan, un seul calcul suffit.

Réponse. $(ABC): x - y + 2z - 3 = 0$, et D la vérifie.

Correction de l'exercice 8 - Un rayon laser

Le rayon est la demi-droite $M(t) = L + t\vec{u}, t \geq 0$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 - 5t \end{cases} \quad t \geq 0$$

a) **Sol** $z = 0 : 5 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 1$, point $(2; 3; 0)$.

b) **Mur** $x = 1,5 : 1 + t = 1,5 \Leftrightarrow t = 0,5$.

- $0,5 < 1$: le rayon atteint le mur **avant** le sol, au point $(1,5; 2; 2,5)$.
- Le point d'impact au sol calculé en a) n'est donc jamais atteint (le mur l'arrête).

— **Méthode** : comparer les **valeurs du paramètre** pour savoir quel obstacle est rencontré en premier.

Réponse. a) $(2; 3; 0)$ · b) oui, en $(1,5; 2; 2,5)$ pour $t = 0,5 < 1$.

Correction de l'exercice 9 - Trois plans concourants

On résout le système, en commençant par les équations les plus simples :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

— $z = 2$; $y = x$; puis $2x + 2 = 6$, soit $x = 2$ et $y = 2$.

Les trois plans se coupent en un **unique point** $(2; 2; 2)$.

— **Interprétation** : $P_2 \cap P_3$ est la droite $(t; t; 2)$, horizontale ; elle perce P_1 en un point.

— **Autres cas possibles** : trois plans peuvent aussi n'avoir aucun point commun (par exemple deux d'entre eux parallèles) ou se couper selon une droite (plans « en livre ouvert »).

Réponse. Le point $(2; 2; 2)$.

Correction de l'exercice 10 - Une diagonale perce un plan oblique

a) $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{BG}(0; 1; 1)$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0 \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 + 1 - 1 = 0$$

— Équation $x + y - z + d = 0$; avec $B(1; 0; 0)$: $d = -1$. $(BDG): x + y - z - 1 = 0$.

— **Vérification** : $G(1; 1; 1)$: $1 + 1 - 1 - 1 = 0$ ✓

b) (EC) : $E(0; 0; 1)$ et $\overrightarrow{EC}(1; 1; -1)$, soit $(t; t; 1 - t)$. **Substitution** :

— $t + t - (1 - t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$.

— Point $R\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

— **Remarque** : $\overrightarrow{EC} = \vec{n}$: la diagonale (EC) est **perpendiculaire** au plan (BDG) , et R est le centre de gravité du triangle BDG .

Réponse. a) $(BDG): x + y - z - 1 = 0$ · b) $R\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 11 - L'ombre d'un poteau

a) Le rayon passant par T est la droite $T + t\vec{u}$:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

— Sol : $3 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$; $T\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

b) L'ombre du poteau est le segment $[PT]$:

— $\overrightarrow{PT}\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$, longueur $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$ m.

— **Contrôle** : le rapport hauteur/ombre vaut $\frac{3}{2,12} \approx 1,41 = \sqrt{2}$; c'est la tangente de la hauteur du soleil, qui est donc d'environ $54,7^\circ$.

Réponse. a) $T\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}; 0\right) \cdot$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12 \text{ m.}$

Correction de l'exercice 12 - Hauteur d'un tétraèdre

a) Droite passant par A , dirigée par $\vec{n}(2; 1; 2) : (3 + 2t; 2 + t; 4 + 2t)$. **Substitution :**

$$2(3 + 2t) + (2 + t) + 2(4 + 2t) = 7 \Leftrightarrow 16 + 9t = 7 \Leftrightarrow t = -1$$

— $H(1; 1; 2)$; **vérification** : $2 + 1 + 4 = 7 \checkmark$

b) $\overrightarrow{AH} = -\vec{n}$, donc $AH = \|\vec{n}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

— **Volume** : $V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times 6 \times 3 = 6$.

— **Méthode** : la hauteur d'un tétraèdre est la distance du sommet au plan de la base ; le projeté orthogonal en donne le pied.

Réponse. a) $H(1; 1; 2)$ · b) distance 3, volume 6.

Correction de l'exercice 13 - Un plan d'une famille contenant une droite

Substitution de D dans l'équation de P_m :

$$t + m \times 1 + (2 - t) = 2 \Leftrightarrow m = 0$$

(le paramètre t disparaît).

a) Si $m = 0$, l'égalité est vraie pour **tout** t : $D \subset P_0 : x + z = 2$.

b) Si $m \neq 0$, l'égalité $m = 0$ est **fausse** pour tout t : aucun point commun. D est **strictement parallèle** à P_m .

— **Contrôle** : $\vec{u}(1; 0; -1)$ et $\vec{n}_m(1; m; 1)$ vérifient $\vec{u} \cdot \vec{n}_m = 1 - 1 = 0$ pour tout m : la droite est toujours parallèle aux plans de la famille $\checkmark$

Réponse. a) $m = 0$ · b) strictement parallèle si $m \neq 0$.

Correction de l'exercice 14 - Deux droites selon un paramètre

Les directions $(1; 1; 1)$ et $(1; -1; 1)$ ne sont pas colinéaires : les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires. On résout :

$$\begin{cases} 1 + t = 2 + s \\ 2 + t = 1 - s \\ 3 + t = m + s \end{cases}$$

— Des deux premières : $t = 1 + s$ et $2 + 1 + s = 1 - s$, donc $s = -1$ et $t = 0$.

— La troisième devient $3 = m - 1$, soit $m = 4$.

Si $m = 4$: les droites sont **sécantes** en $(1; 2; 3)$ ($t = 0$).

Si $m \neq 4$: le système est incompatible, les droites sont **non coplanaires**.

Réponse. $m = 4$, sécantes en $(1; 2; 3)$; sinon non coplanaires.

Correction de l'exercice 15 - Une diagonale perpendiculaire à un plan

a) $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AH}(0; 1; 1)$. On cherche $\vec{n}(a; b; c)$:

$$a + b = 0 \quad b + c = 0$$

— $\vec{n}(1; -1; 1)$; le plan passe par A : $(ACH): x - y + z = 0$.

— **Vérification** : $C : 1 - 1 + 0 = 0 \checkmark$; $H : 0 - 1 + 1 = 0 \checkmark$

b) $\overrightarrow{DF} = (1 - 0; 0 - 1; 1 - 0) = (1; -1; 1) = \vec{n}$: (DF) est **perpendiculaire** à (ACH) .

$(DF):(t; 1 - t; t)$. **Substitution** : $t - (1 - t) + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

— $M\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, au tiers de $[DF]$ en partant de D .

Réponse. a) $(ACH):x - y + z = 0$ · b) $\overrightarrow{DF} = \vec{n}$; $M\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.