

Plaquette 3 - Positions relatives droites / plans

Droites et plans dans l'espace — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Deux droites D (direction $\vec{u}$) et D' (direction $\vec{u}'$) :

- $\vec{u}, \vec{u}'$ colinéaires : **parallèles** (strictement, ou confondues si un point commun) ;
- sinon, on résout le système (deux paramètres t et s) : une solution → **sécantes** ; aucune → **non coplanaires**.

Une droite et un plan (D de direction $\vec{u}$, P de vecteur normal $\vec{n}$) :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0 \Rightarrow D \text{ et } P \text{ sont sécants (en un point)}$$

Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$: D est **parallèle** à P , strictement ou **contenue** dans P (un point de D dans P suffit à trancher).

Méthode de substitution : on remplace la représentation de D dans l'équation de P ; on obtient une équation en t : une solution (sécants), aucune (strictement parallèles), toute valeur (contenue).

Deux plans : vecteurs normaux colinéaires → parallèles (strictement ou confondus) ; sinon → sécants selon une **droite**.

Droite orthogonale à un plan : $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$.

Correction de l'exercice 1 - Deux droites confondues

Directions : $\vec{u}(1; 2; -1)$ et $\vec{u}'(2; 4; -2)$.

$$\vec{u}' = 2\vec{u}$$

Les droites sont **parallèles**.

Point commun ? Le point $(2; 2; 2)$ de D' ($s = 0$) est-il sur D ? $x = 2$ donne $t = 1$, puis $y = 2$ ✓, $z = 2$ ✓.

Les droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont **confondues**.

- **Méthode** : si les directions sont colinéaires, un seul point à tester suffit pour décider entre « strictement parallèles » et « confondues ».

Réponse. Directions colinéaires et point commun : droites confondues.

Correction de l'exercice 2 - Deux droites sécantes

Directions : $\vec{u}(1; -1; 3)$ et $\vec{u}'(1; 2; 1)$ ne sont pas colinéaires (premières coordonnées égales, deuxième différentes).

Système (deux paramètres distincts) :

$$\begin{cases} 1 + t = 2 + s \\ 2 - t = 1 + 2s \\ 3t = 3 + s \end{cases}$$

- Première ligne : $t = 1 + s$. Dans la deuxième : $2 - 1 - s = 1 + 2s$, soit $s = 0$, puis $t = 1$.
- **Vérification** sur la troisième : $3 \times 1 = 3 + 0$ ✓

Les droites sont **sécantes** au point $(2; 1; 3)$ (obtenu avec $t = 1$ ou $s = 0$).

- **Piège** : utiliser le **même** paramètre pour les deux droites ; cela reviendrait à imposer que les points coïncident « au même instant ».

Réponse. Sécantes en $(2 ; 1 ; 3)$.

Correction de l'exercice 3 - Deux droites non coplanaires

Directions : $\vec{u}(1 ; 1 ; 2)$ et $\vec{v}(-1 ; 1 ; 1)$, non colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.

Point commun ?

$$\begin{cases} t = 1 - s \\ 1 + t = s \\ 2t = 1 + s \end{cases}$$

- Des deux premières : $1 + 1 - s = s$, donc $s = 1$ et $t = 0$.
- Troisième : $0 = 2$ ✗.

Pas de point commun, pas parallèles : les droites sont **non coplanaires**.

- **Rappel** : dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas forcément parallèles — c'est la grande différence avec la géométrie plane.

Réponse. Non coplanaires (ni parallèles, ni sécantes).

Correction de l'exercice 4 - Une droite qui perce un plan

Test rapide : $\vec{u}(1 ; -1 ; 2)$ et $\vec{n}(1 ; 1 ; -1)$; $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$: la droite **perce** le plan en un point.

Substitution dans l'équation du plan :

$$(1 + t) + (2 - t) - (3 + 2t) = 0 \Leftrightarrow -2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

- Point d'intersection : $(1 ; 2 ; 3)$.
- **Vérification** : $1 + 2 - 3 = 0$ ✓
- **Méthode** : la substitution donne une équation à **une inconnue** t ; c'est le moyen le plus rapide.

Réponse. Intersection en $(1 ; 2 ; 3)$.

Correction de l'exercice 5 - Une droite parallèle à un plan

a) $\vec{u}(1 ; 1 ; 2)$ et $\vec{n}(1 ; 1 ; -1)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 1 - 2 = 0$$

La direction de D est orthogonale à $\vec{n}$: D est **parallèle** à P .

b) On teste un point de D , par exemple $(1 ; 0 ; 0)$ ($t = 0$) : $1 + 0 - 0 = 1 \neq 4$.

- Ce point n'est pas dans P : D est **strictement parallèle** à P .
- **Par substitution** : $(1 + t) + t - 2t = 4$ donne $1 = 4$, **impossible** pour tout t : aucun point commun ✓

Réponse. a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ · b) non : strictement parallèle.

Correction de l'exercice 6 - Une droite contenue dans un plan

Substitution de la représentation dans l'équation du plan :

$$t + (1 + t) - (1 + 2t) = 0$$

- Le membre de gauche vaut $t + 1 + t - 1 - 2t = 0$ pour **tout** réel t .

Tous les points de D vérifient l'équation : $D \subset P$.

- **Autre méthode** : $\vec{u}(1; 1; 2) \cdot \vec{n}(1; 1; -1) = 0$ (parallélisme), et le point $(0; 1; 1)$ de D vérifie $0 + 1 - 1 = 0$ (point commun) ✓
- **Bilan des trois cas** : équation en t avec une solution (sécants), sans solution (strictement parallèles), toujours vraie (contenue).

Réponse. L'équation est vérifiée pour tout t : $D \subset P$.

Correction de l'exercice 7 – Deux plans strictement parallèles

Vecteurs normaux : $\vec{n}_P(1; 1; 1)$ et $\vec{n}_Q(2; 2; 2) = 2\vec{n}_P$.

$$\vec{n}_Q = 2\vec{n}_P$$

Les plans sont **parallèles**.

Confondus ? En divisant l'équation de Q par 2 : $x + y + z = \frac{5}{2} \neq 1$. Les deux équations ne peuvent être vérifiées ensemble : les plans sont **strictement parallèles**.

- **Image** : ce sont deux « tranches » parallèles ; les points de Q sont tous « plus loin » de l'origine que ceux de P dans la direction $(1; 1; 1)$.

Réponse. Strictement parallèles.

Correction de l'exercice 8 – Une droite orthogonale à un plan

Orthogonalité : $\vec{n}(2; -1; 3)$ et $\vec{u} = -2\vec{n}$.

$$\vec{u} \text{ colinéaire à } \vec{n} \Leftrightarrow D \perp P$$

La droite est bien **orthogonale** au plan.

Intersection : $D: (1 - 4t; 1 + 2t; 1 - 6t)$. Substitution :

- $2(1 - 4t) - (1 + 2t) + 3(1 - 6t) = 1 \Leftrightarrow 4 - 28t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{3}{28}$.
- Point : $\left(1 - \frac{12}{28}; 1 + \frac{6}{28}; 1 - \frac{18}{28}\right) = \left(\frac{4}{7}; \frac{17}{14}; \frac{5}{14}\right)$.
- C'est le **projeté orthogonal** de A sur P .
- **Vérification** : $\frac{8}{7} - \frac{17}{14} + \frac{15}{14} = \frac{16 - 17 + 15}{14} = 1$ ✓

Réponse. Oui ($\vec{u} = -2\vec{n}$) ; intersection $\left(\frac{4}{7}; \frac{17}{14}; \frac{5}{14}\right)$.

Correction de l'exercice 9 – La diagonale perce une face oblique

(AG) a pour représentation $(t; t; t)$, $t \in \mathbb{R}$. **Substitution** :

$$t + t + t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

- Point d'intersection : $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
- **Interprétation** : K est le centre de gravité du triangle BDE ; et comme $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ est normal au plan, K est aussi le **projeté orthogonal** de A sur (BDE) .
- **Distance** de A au plan : $AK = \sqrt{3 \times \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$.

Réponse. $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 10 - Deux diagonales de faces parallèles

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

$$\overrightarrow{AF}(1; 0; 1) \quad \overrightarrow{DG} = (1 - 0; 1 - 1; 1 - 0) = (1; 0; 1)$$

- $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$: les droites sont **parallèles**.
- $D(0; 1; 0)$ n'est pas sur (AF) (dont tous les points ont une ordonnée nulle) : elles sont **strictement parallèles**.
- **Géométriquement** : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$, donc $ADGF$ est un parallélogramme (même un rectangle) ; $[AF]$ et $[DG]$ en sont deux côtés opposés.

Réponse. Strictement parallèles ($\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$).

Correction de l'exercice 11 - Deux diagonales de faces non coplanaires

Représentations : (AF) passe par A , direction $(1; 0; 1)$; (BG) passe par $B(1; 0; 0)$, direction $\overrightarrow{BG}(0; 1; 1)$:

$$(AF):(t; 0; t) \quad (BG):(1; s; s)$$

- **Directions** non colinéaires : pas parallèles.
- **Point commun** : $t = 1, 0 = s, t = s$, d'où $1 = 0$ ✗.

Les droites sont **non coplanaires**.

- **Sur la figure** : $[AF]$ est dans la face avant, $[BG]$ dans la face de droite ; elles semblent se croiser près de F et B , mais la perspective trompe — il faut calculer.

Réponse. Non coplanaires.

Correction de l'exercice 12 - Section d'une pyramide à mi-hauteur

a) $(SA) : S + t\overrightarrow{SA}$ avec $\overrightarrow{SA}(-1; -1; -3)$, soit $(1 - t; 1 - t; 3 - 3t)$.

$$3 - 3t = 1,5 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

- Point $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, milieu de $[SA]$.
- De même, $(SC):(1 + t; 1 + t; 3 - 3t)$ donne $t = \frac{1}{2}$ et $P\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

b) Par symétrie, P coupe les quatre arêtes latérales en leurs milieux M, N, P, Q . Le plan est **parallèle à la base** (horizontal), la section est un **carré** de côté 1 (théorème des milieux : moitié du côté 2).

- Aire : 1, soit le quart de l'aire de la base (4) — une réduction de rapport $\frac{1}{2}$ divise les aires par 4.

Réponse. M et P milieux de $[SA]$ et $[SC]$; section carrée d'aire 1.

Correction de l'exercice 13 - Parallélisme selon un paramètre

a) D_m est parallèle à P si et seulement si son vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal :

$$\vec{u}_m(2; 1; m) \cdot \vec{n}(1; -1; 1) = 2 - 1 + m = 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

- b) Pour $m = -1$, le point $(1; 0; 0)$ de la droite ($t = 0$) donne $1 - 0 + 0 = 1 \neq 3$.
- La droite est **strictement parallèle** au plan.

- **Pour** $m \neq -1$: la substitution donne $(1 + 2t) - t + mt = 3$, soit $(1 + m)t = 2$, qui a une unique solution $t = \frac{2}{1+m}$: la droite perce le plan.

Réponse. a) $m = -1$ · b) non, strictement parallèle.

Correction de l'exercice 14 - Le pied d'une perpendiculaire

a) $A : 2 + 0 + 0 = 2$ ✓ ; B et C de même. Les trois points (non alignés) vérifient l'équation : c'est bien (ABC) .

b) La perpendiculaire à (ABC) passant par O a pour vecteur directeur $\vec{n}(1; 1; 1) : (t; t; t)$.

Substitution :

$$3t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

— $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ — c'est aussi le centre de gravité du triangle équilatéral ABC .

— $OH = \sqrt{3 \times \frac{4}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15$.

— **Interprétation** : OH est la **distance** de O au plan (ABC) , c'est-à-dire la hauteur du tétraèdre $OABC$ issue de O .

Réponse. $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $OH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Correction de l'exercice 15 - L'intersection de deux plans

a) $\vec{n}_P(1; 1; 1)$ et $\vec{n}_Q(1; -1; 0)$ ne sont pas colinéaires : les plans sont **sécants** selon une droite.

b) On résout le système en prenant une inconnue comme paramètre. Avec $x = t$:

— Q donne $y = t$;

— P donne $z = 2 - x - y = 2 - 2t$.

$$P \cap Q : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

— **Vérification** : $t + t + 2 - 2t = 2$ ✓ et $t - t = 0$ ✓

— Cette droite passe par $C(0; 0; 2)$ ($t = 0$) et $I(1; 1; 0)$ ($t = 1$), milieu de $[AB]$: c'est une **médiane** du triangle ABC .

Réponse. Sécants ; droite $(t; t; 2 - 2t)$, passant par C et $I(1; 1; 0)$.