

Plaquette 1 – Représentations paramétriques de droites

Droites et plans dans l'espace — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Représentation paramétrique. La droite D passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ non nul est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, soit

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Lecture : pour $t = 0$, on obtient le point A ; les coefficients de t donnent un vecteur directeur.

Non-unicité : une même droite a une infinité de représentations (autre point, vecteur directeur colinéaire).

Appartenance : $M \in D$ si et seulement s'il existe **un même** réel t vérifiant les trois équations.

Segment et demi-droite : $t \in [0; 1]$ décrit le segment $[AB]$ (avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$) ; $t \geq 0$ décrit la demi-droite $[AB)$.

Droites parallèles : même direction, donc vecteurs directeurs colinéaires.

Mouvement rectiligne uniforme : $M(t) = A + t\vec{v}$; la vitesse est $\|\vec{v}\|$ (en repère orthonormé).

Correction de l'exercice 1 – Lire une représentation paramétrique

On lit la représentation sous la forme

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

a) Pour $t = 0$: $A(1; -1; 3) \in D$. Les coefficients de t donnent $\vec{u}(2; 1; -1)$.

b) On remplace t :

— $t = 1$: $(1 + 2; -1 + 1; 3 - 1) = (3; 0; 2)$;

— $t = -2$: $(1 - 4; -1 - 2; 3 + 2) = (-3; -3; 5)$.

— **Piège :** le coefficient de t dans $z = 3 - t$ est -1 ; le vecteur directeur est $(2; 1; -1)$ et non $(2; 1; 1)$.

Réponse. a) $A(1; -1; 3)$, $\vec{u}(2; 1; -1)$ · b) $(3; 0; 2)$ et $(-3; -3; 5)$.

Correction de l'exercice 2 – Écrire une représentation paramétrique

On applique directement la définition $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

— Un deuxième point : avec $t = 1$, $(3; 3; -1)$.

- **Vérification** : pour $t = 0$, on retrouve $A(2; 0; 1)$ ✓, et le vecteur des coefficients de t est bien $\vec{u}$ ✓
 - **Remarque** : la coordonnée y de A est nulle, d'où $y = 0 + 3t = 3t$.
- Réponse.** $x = 2 + t$, $y = 3t$, $z = 1 - 2t$; par exemple $(3; 3; -1)$.

Correction de l'exercice 3 - La droite passant par deux points

a) Un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}(2; -1; 4)$, et la droite passe par A :

$$(AB): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- **Vérification** : $t = 0$ donne A , $t = 1$ donne $(3; 1; 4) = B$ ✓
- b) $t = \frac{1}{2} : \left(1 + 1; 2 - \frac{1}{2}; 2\right) = \left(2; \frac{3}{2}; 2\right)$, c'est le **milieu** de $[AB]$.
- **Interprétation** : avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, le paramètre t mesure la position sur la droite « en unités AB » : $t = 0$ en A , $t = 1$ en B .

Réponse. a) $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 4t$ · b) le milieu $\left(2; \frac{3}{2}; 2\right)$.

Correction de l'exercice 4 - Un point est-il sur la droite ?

$M \in D$ si et seulement si le **même** t vérifie les trois équations.

a) Pour C :

$$5 = 1 + 2t \Leftrightarrow t = 2$$

- avec $t = 2$: $y = 2 - 2 = 0$ ✓ et $z = 8$ ✓. Donc $C \in D$.
- b) Pour E : $-1 = 1 + 2t$ donne $t = -1$; alors $y = 3$ ✓ mais $z = -4 \neq -3$ ✗.
- $E \notin D$.
 - **Méthode** : on trouve t avec une équation, puis on **vérifie** les deux autres. Deux coordonnées correctes ne suffisent pas.

Réponse. a) Oui ($t = 2$) · b) Non.

Correction de l'exercice 5 - Deux écritures d'une même droite

Deux droites sont confondues si elles ont des vecteurs directeurs **colinéaires** et un **point commun**.

- **Directions** : $\vec{u}_1(2; -1; 4)$ et $\vec{u}_2(-4; 2; -8)$. On a

$$\vec{u}_2 = -2\vec{u}_1$$

(les trois coordonnées sont multipliées par -2) : les droites sont **parallèles**.

- **Point commun** : pour $s = 0$, D_2 passe par $(5; 0; 8)$. Dans D_1 , $x = 5$ donne $t = 2$, puis $y = 2 - 2 = 0$ ✓ et $z = 8$ ✓ : ce point est aussi sur D_1 .

Parallèles avec un point commun : D_1 et D_2 sont **confondues**.

- **Leçon** : une même droite admet une infinité de représentations paramétriques ; les paramètres t et s repèrent les points différemment ($s = 0$ correspond à $t = 2$).

Réponse. $\vec{u}_2 = -2\vec{u}_1$ et le point $(5; 0; 8)$ est commun : droites confondues.

Correction de l'exercice 6 - Diagonales du cube

a) $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ et $\overrightarrow{BH} = (0 - 1; 1 - 0; 1 - 0) = (-1; 1; 1)$:

$$(AG): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (BH): \begin{cases} x = 1 - s \\ y = s \\ z = s \end{cases}$$

b) On cherche t et s tels que les points coïncident :

— $t = 1 - s, t = s, t = s$;

— d'où $s = 1 - s, s = \frac{1}{2}$, puis $t = \frac{1}{2}$.

Point d'intersection : $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, le **centre du cube**.

— **Attention** : on utilise **deux paramètres différents** (t et s) ; les points d'intersection ne correspondent pas forcément à la même valeur de paramètre.

Réponse. $(AG) : (t; t; t)$; $(BH) : (1 - s; s; s)$; intersection $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 7 - Droites particulières

On choisit à chaque fois un point et un vecteur directeur :

$$M = A + t\vec{u}$$

a) Point O , vecteur $\vec{i}(1; 0; 0)$: $x = t, y = 0, z = 0$.

b) Point P , vecteur $\vec{k}(0; 0; 1)$: $x = 2, y = 3, z = t$. Seule la cote varie : c'est une **verticale**.

c) Point O , vecteur $\overrightarrow{OQ}(1; 1; 2)$: $x = t, y = t, z = 2t$.

— **Remarque sur b)** : les coordonnées « constantes » signalent une droite parallèle à un axe.

— **Remarque sur c)** : une droite passant par l'origine a une représentation sans terme constant.

Réponse. a) $(t; 0; 0)$ · b) $(2; 3; t)$ · c) $(t; t; 2t)$.

Correction de l'exercice 8 - Segment et demi-droite

a) Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(2; 4; -2)$, $t = 0$ donne A et $t = 1$ donne B :

$$[AB]: t \in [0; 1] \quad [AB): t \geq 0$$

b) Pour M : $4 = 1 + 2t$ donne $t = \frac{3}{2}$; alors $y = 6$ ✓ et $z = 2 - 3 = -1$ ✓. Donc $M \in (AB)$ avec $t = \frac{3}{2}$.

— $\frac{3}{2} \notin [0; 1]$: M n'est **pas** sur le segment $[AB]$;

— $\frac{3}{2} \geq 0$: M est sur la demi-droite $[AB)$, **au-delà de B**.

— **Milieu** de $[AB]$: $t = \frac{1}{2}$, soit $(2; 2; 1)$.

Réponse. a) $t \in [0; 1]$; $t \geq 0$ · b) $M \notin [AB], M \in [AB)$ ($t = \frac{3}{2}$).

Correction de l'exercice 9 - Le point de cote nulle

a) On impose la condition sur la coordonnée concernée, puis on calcule le point :

$$z = 0 \Leftrightarrow 4 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

— Point : $(2 + 2; -1 + 6; 0) = (4; 5; 0)$. C'est la **trace** de la droite sur le plan (xOy) .

b) $y = 0 \Leftrightarrow -1 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

— Point : $\left(2 + \frac{1}{3}; 0; 4 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}; 0; \frac{10}{3}\right)$.

— **Interprétation** : c'est l'endroit où la droite traverse le « sol » (a) ou le « mur » (xOz) (b).

Réponse. a) $(4; 5; 0)$ · b) $\left(\frac{7}{3}; 0; \frac{10}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 10 - Une parallèle passant par un point

a) $0 = 1 + 3t$ donne $t = -\frac{1}{3}$; alors $y = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \neq 1$ ✗. Donc $M \notin D$.

b) Deux droites parallèles ont le même vecteur directeur : on garde $\vec{u}(3; -1; 2)$ et on change de point.

$$D': \begin{cases} x = 3s \\ y = 1 - s \\ z = 1 + 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

— **Vérification** : $s = 0$ donne M ✓

— **Remarque** : on a pris soin d'appeler le paramètre s pour ne pas le confondre avec celui de D .

Réponse. b) $x = 3s, y = 1 - s, z = 1 + 2s$.

Correction de l'exercice 11 - Une droite dans le cube

a) $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ et $E(0; 0; 1)$, donc $\overrightarrow{EI}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$:

$$(EI): \begin{cases} x = \frac{s}{2} \\ y = \frac{s}{2} \\ z = 1 - s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

b) (AG) a pour représentation $(t; t; t)$. On résout :

— $\frac{s}{2} = t$ (deux fois) et $1 - s = t$;

— d'où $1 - s = \frac{s}{2}$, $s = \frac{2}{3}$ et $t = \frac{1}{3}$.

Les droites se coupent en $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ — le centre de gravité du triangle BDE rencontré dans le chapitre précédent.

Réponse. a) $\left(\frac{s}{2}; \frac{s}{2}; 1 - s\right)$ · b) intersection $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 12 - La trajectoire d'un drone

a) C'est la représentation paramétrique de la droite passant par $(2; 1; 10)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(3; 4; 0)$: trajectoire **rectiligne**, à l'altitude constante $z = 10$ m (le vecteur a une cote nulle).

b) En une seconde, le drone se déplace du vecteur $\vec{v}$; sa vitesse est

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \text{ m/s}$$

c) $2 + 3t = 17 \Leftrightarrow t = 5$ s. Position : $(17; 21; 10)$.

- **Interprétation du paramètre** : ici t est un **temps**, et la représentation paramétrique décrit un **mouvement**, pas seulement une droite.

Réponse. a) droite horizontale à 10 m · b) 5 m/s · c) $t = 5$ s, en (17 ; 21 ; 10).

Correction de l'exercice 13 - Deux drones se croisent-ils ?

a) Les **trajectoires** sont des droites ; on cherche un point commun avec **deux paramètres indépendants** t et s :

$$1 + t = 6 - 3s \quad 2t = 4 \quad 5 = 5$$

— $t = 2$, puis $3s = 6 - 3 = 3$, $s = 1$.

— Point commun : $P(3 ; 4 ; 5)$.

b) Le drone A passe en P à l'instant $t = 2$; le drone B y passe à l'instant 1. Ils ne sont **pas au même endroit au même moment** : pas de collision.

— **Vérification** : à $t = 1$, $A(1) = (2 ; 2 ; 5)$ et $B(1) = (3 ; 4 ; 5)$, distincts ✓

— **Leçon** : trajectoires sécantes ne veut pas dire collision ; pour une collision, il faut le **même** paramètre temps.

Réponse. a) $P(3 ; 4 ; 5)$ · b) non : A y passe à $t = 2$, B à $t = 1$.

Correction de l'exercice 14 - Trouver une coordonnée manquante

On utilise les coordonnées connues pour trouver t , puis on en déduit m :

$$y = 4 \Leftrightarrow 2 + t = 4 \Leftrightarrow t = 2$$

— Vérification sur la cote : $z = 3 - 2 = 1$ ✓ — la condition est compatible.

— Abscisse : $m = 1 + 2 = 3$.

Le point $P(3 ; 4 ; 1)$ appartient à D .

— **Cas impossible** : si l'on avait demandé $P(m ; 4 ; 0)$, la cote aurait donné $t = 3$, incompatible avec $t = 2$: **aucune** valeur de m n'aurait convenu.

Réponse. $m = 3$.

Correction de l'exercice 15 - Une arête de pyramide

a) $\overrightarrow{SC}(1 ; 1 ; -3)$, et la droite passe par S :

$$(SC): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

— $t = 0$ donne S , $t = 1$ donne C : l'arête $[SC]$ correspond à $t \in [0 ; 1]$.

b) $3 - 3t = 1,5 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$, qui est bien dans $[0 ; 1]$.

— Point : $M\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$, le **milieu** de $[SC]$ (normal : la moitié de la hauteur).

Réponse. a) $(1 + t ; 1 + t ; 3 - 3t)$ · b) $M\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.