

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : représentations paramétriques, intersections et distances

Droites et plans dans l'espace — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Représentation paramétrique d'une droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Représentation paramétrique d'un plan passant par A et dirigé par $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires :

$$\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Positions relatives.

- **Droite et plan** : on **substitue** la paramétrisation dans l'équation du plan. Une solution unique en $t \rightarrow$ droite **sécante** ; aucune solution $\rightarrow$ droite **strictement parallèle** ; une infinité $\rightarrow$ droite **contenue** dans le plan.
- **Deux plans** : normaux colinéaires $\rightarrow$ **parallèles** (confondus si les équations sont proportionnelles) ; sinon **sécants** suivant une **droite**.
- **Deux droites** : directeurs colinéaires $\rightarrow$ **parallèles** ; sinon on résout le système — solution $\rightarrow$ **sécantes** (donc coplanaires), pas de solution $\rightarrow$ **non coplanaires**.

Distances.

$$d(M, P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad d(M, D) = |\overline{HM}| \text{ avec } \overline{AH} = \frac{\overline{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

Angle de deux plans : c'est l'angle **aigu** de leurs vecteurs normaux,

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

Correction de l'exercice 1 – Représentation paramétrique d'une droite

- **Vecteur directeur** : $\overline{AB}(3; -2; -2)$.
- **Représentation paramétrique** :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- **Test de C** : la première équation donne $7 = 1 + 3t$, donc $t = 2$.
- **Vérification sur y** : $2 - 2 \times 2 = -2 \checkmark$
- **Vérification sur z** : $3 - 2 \times 2 = -1 \checkmark$

- **Conclusion** : C appartient à (AB) , pour $t = 2$.
- **Contrôle vectoriel** : $\overrightarrow{AC}(6; -4; -4) = 2\overrightarrow{AB} \checkmark$ — les vecteurs sont bien colinéaires.
- **Méthode** : toujours trouver t avec **une** équation, puis **contrôler** sur les deux autres. Une seule discordance suffit à exclure le point.

Réponse. $x = 1 + 3t$, $y = 2 - 2t$, $z = 3 - 2t$; C appartient à la droite ($t = 2$).

Correction de l'exercice 2 - De la paramétrique à la cartésienne

- **Point et directeurs** : $A(1; 0; 2)$, $\vec{u}(1; 1; 2)$ et $\vec{v}(1; -1; 0)$.
 - **Vecteur normal** $\vec{n}(a; b; c)$ orthogonal aux deux :
 - $\vec{n} \cdot \vec{u} = a + b + 2c = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = a - b = 0$, donc $b = a$.
 - En reportant : $2a + 2c = 0$, donc $c = -a$. Avec $a = 1$: $\vec{n}(1; 1; -1)$.
 - **Équation** : $x + y - z + d = 0$; avec A : $1 + 0 - 2 + d = 0$, donc $d = 1$.
- $$P: x + y - z + 1 = 0$$
- **Vérification** : en substituant la paramétrique,
 $(1 + t + t') + (t - t') - (2 + 2t) + 1 = 1 + t + t' + t - t' - 2 - 2t + 1 = 0 \checkmark$ —
identiquement nul, quels que soient t et t' .
 - **Contrôle du normal** : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 + 1 - 2 = 0 \checkmark$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 1 - 1 - 0 = 0 \checkmark$

Réponse. $x + y - z + 1 = 0$.

Correction de l'exercice 3 - Intersection droite-plan

- **Substitution** dans l'équation du plan :
 $(2 + t) + 2(1 - t) + 3t - 5 = 2 + t + 2 - 2t + 3t - 5 = 2t - 1$
- **Résolution** : $2t - 1 = 0$ donne $t = \frac{1}{2}$.
- **Point d'intersection** : $x = 2 + 0,5 = 2,5$, $y = 1 - 0,5 = 0,5$, $z = 1,5$.
 $I(2,5; 0,5; 1,5)$
- **Vérification** : $2,5 + 2 \times 0,5 + 1,5 - 5 = 2,5 + 1 + 1,5 - 5 = 0 \checkmark$
- **Position relative** : une **solution unique** → la droite est **sécante** au plan en un seul point.
- **Contrôle de non-parallélisme** : $\vec{u}(1; -1; 3)$ et $\vec{n}(1; 2; 1)$ donnent
 $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 - 2 + 3 = 2 \neq 0 \checkmark$ — cohérent avec une intersection en un point.

Réponse. $I(2,5; 0,5; 1,5)$: droite sécante au plan.

Correction de l'exercice 4 - Droite parallèle à un plan

- **Substitution** : $(1 + 2t) + 2(-t) - 4 = 1 + 2t - 2t - 4 = -3$.
- L'expression vaut -3 **pour tout** t : l'équation $-3 = 0$ n'a **aucune solution**.
- **Conclusion** : la droite ne rencontre **jamais** le plan, elle est **strictement parallèle** $\checkmark$
- **Confirmation par les vecteurs** : $\vec{u}(2; -1; 0)$ et $\vec{n}(1; 2; 0)$ donnent $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 - 2 + 0 = 0$ — le directeur est **orthogonal au normal**, donc parallèle au plan.
- **Distance constante** : tout point de D est à la distance $\frac{|-3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1,342$ du plan.
- **Distinction importante** : si la substitution avait donné $0 = 0$, la droite serait **contenue** dans le plan — d'où le mot « strictement ».

Réponse. La substitution donne $-3 = 0$, impossible : parallélisme strict, à distance $\frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1,34$.

Correction de l'exercice 5 - Intersection de deux plans

- **Normaux** : $\vec{n}_1(1; 1; 1)$ et $\vec{n}_2(1; -1; 2)$ — **non colinéaires**, donc les plans sont **sécants** suivant une droite.
- **Résolution** : on pose $z = t$ comme paramètre.
- Le système devient $\begin{cases} x + y = 3 - t \\ x - y = 1 - 2t \end{cases}$
- **Somme** : $2x = 4 - 3t$, donc $x = 2 - \frac{3t}{2}$.
- **Différence** : $2y = 2 + t$, donc $y = 1 + \frac{t}{2}$.
- **Représentation paramétrique** (en posant $t = 2s$ pour éviter les fractions) :

$$\begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 1 + s \\ z = 2s \end{cases}$$
- **Vérifications** pour $s = 0$, le point $(2; 1; 0)$: $2 + 1 + 0 = 3$ ✓ et $2 - 1 + 0 = 1$ ✓
- Pour $s = 1$, le point $(-1; 2; 2)$: $-1 + 2 + 2 = 3$ ✓ et $-1 - 2 + 4 = 1$ ✓
- **Contrôle** : le directeur $\vec{u}(-3; 1; 2)$ est orthogonal aux **deux** normaux : $-3 + 1 + 2 = 0$ ✓ et $-3 - 1 + 4 = 0$ ✓

Réponse. La droite $x = 2 - 3s$, $y = 1 + s$, $z = 2s$.

Correction de l'exercice 6 - Deux droites non coplanaires

- **Directeurs** : $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\vec{v}(1; 0; 1)$ — **non colinéaires**, donc pas parallèles.
- **Recherche d'un point commun** : on résout le système

$$\begin{cases} t = 1 + s \\ 1 + t = 2 \\ 2 = s \end{cases}$$
- La deuxième donne $t = 1$; la troisième donne $s = 2$.
- **Test de la première** : $1 = 1 + 2 = 3$? **Non** — le système est **incompatible**.
- **Conclusion** : les droites ne sont **ni parallèles ni sécantes**, elles sont **non coplanaires**.
- **Contrôle par la coplanarité des vecteurs** : $A(0; 1; 2)$ sur D , $B(1; 2; 0)$ sur D' , donc $\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$.
- Si $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$, alors $\begin{cases} a + b = 1 \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$ — or $1 + (-2) = -1 \neq 1$: **incompatible** ✓
- Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires, ce qui confirme le résultat.

Réponse. Non coplanaires (système sans solution).

Correction de l'exercice 7 - Plan par trois points

- **Directeurs** : $\overrightarrow{AB}(1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 2)$ — non colinéaires ✓
 - **Vecteur normal** $\vec{n}(a; b; c)$:
 - $a - b + c = 0$ et $-a + 2c = 0$, donc $a = 2c$.
 - En reportant : $2c - b + c = 0$, donc $b = 3c$. Avec $c = 1$: $\vec{n}(2; 3; 1)$.
 - **Équation** : $2x + 3y + z + d = 0$; avec A : $2 + 3 + 0 + d = 0$, donc $d = -5$.
- $P: 2x + 3y + z - 5 = 0$

- **Vérifications** : B donne $4 + 0 + 1 - 5 = 0 \checkmark$; C donne $0 + 3 + 2 - 5 = 0 \checkmark$
- **Contrôle du normal** : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 - 3 + 1 = 0 \checkmark$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 0 + 2 = 0 \checkmark$
- **Remarque** : le vecteur normal n'est défini qu'à **un facteur près** — $(4; 6; 2)$ conviendrait aussi, avec $d = -10$.

Réponse. $2x + 3y + z - 5 = 0$.

Correction de l'exercice 8 - Distance point-plan

- **Distance** :

$$d = \frac{|2 \times 1 - (-2) + 2 \times 4 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|2 + 2 + 8 - 3|}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

- **Projeté orthogonal** : on cherche $H = M + t\vec{n}$ avec $\vec{n}(2; -1; 2)$.
- $2(1 + 2t) - (-2 - t) + 2(4 + 2t) - 3 = 2 + 4t + 2 + t + 8 + 4t - 3 = 9 + 9t$.
- $9 + 9t = 0$ donne $t = -1$.

$$H(1 - 2; -2 + 1; 4 - 2) = H(-1; -1; 2)$$

- **Vérification** : $-2 + 1 + 4 - 3 = 0 \checkmark$ — H est bien dans le plan.
- **Contrôle de la distance** : $\overrightarrow{MH}(-2; 1; -2)$, de norme $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \checkmark$
- **Cohérence** : $|\overrightarrow{MH}| = |t| \times \|\vec{n}\| = 1 \times 3 = 3 \checkmark$

Réponse. $d = 3$ et $H(-1; -1; 2)$.

Correction de l'exercice 9 - Distance point-droite

- **Point et directeur** : $A(1; 0; 0)$ et $\vec{u}(1; 2; -1)$, avec $\|\vec{u}\|^2 = 6$.
- **Projection** : $\overrightarrow{AM}(2; 2; 1)$, donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 2 + 4 - 1 = 5$.
- **Paramètre du projeté** : $t = \frac{5}{6}$.
- **Projeté** : $H\left(1 + \frac{5}{6}; \frac{10}{6}; -\frac{5}{6}\right) = H\left(\frac{11}{6}; \frac{5}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.
- **Vecteur** $\overrightarrow{HM}\left(3 - \frac{11}{6}; 2 - \frac{5}{3}; 1 + \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{11}{6}\right)$.
- **Contrôle d'orthogonalité** : $\frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{11}{6} = \frac{7 + 4 - 11}{6} = 0 \checkmark$
- **Distance** :

$$d = \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{1}{9} + \frac{121}{36}} = \sqrt{\frac{49 + 4 + 121}{36}} = \sqrt{\frac{174}{36}} \approx 2,198$$

- **Contrôle par Pythagore** : $AM^2 = 4 + 4 + 1 = 9$ et $AH^2 = \frac{25}{36} \times 6 = \frac{25}{6}$, donc $d^2 = 9 - \frac{25}{6} = \frac{29}{6} = \frac{174}{36} \checkmark$

Réponse. $d = \sqrt{\frac{29}{6}} \approx 2,20$.

Correction de l'exercice 10 - Angle de deux plans

- **Normaux** : $\vec{n}_1(1; 1; 1)$ et $\vec{n}_2(1; -1; 0)$.
- **Produit scalaire** : $1 - 1 + 0 = 0$.
- **Conclusion** : les normaux sont **orthogonaux**, donc les plans sont **perpendiculaires** : l'angle vaut 90° .
- **Vérification par la droite d'intersection** : en posant $x = y = t$ dans P , on obtient $2t + z = 1$, soit $z = 1 - 2t$.

- La droite d'intersection est donc $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$, de directeur $\vec{w}(1; 1; -2)$.
- **Contrôle** : $\vec{w} \cdot \vec{n}_1 = 1 + 1 - 2 = 0 \checkmark$ et $\vec{w} \cdot \vec{n}_2 = 1 - 1 + 0 = 0 \checkmark$
- **Remarque** : on prend toujours la **valeur absolue** du produit scalaire pour obtenir l'angle aigu — sinon on risque d'annoncer un angle obtus.

Réponse. 90° : les plans sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 11 - Droite perpendiculaire à un plan

- **Directeur** : la droite cherchée a pour directeur le **vecteur normal** $\vec{n}(3; -1; 2)$.

$$D: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

- **Intersection** :
 $3(2 + 3t) - (1 - t) + 2(-1 + 2t) + 4 = 6 + 9t - 1 + t - 2 + 4t + 4 = 7 + 14t.$
 - $7 + 14t = 0$ donne $t = -\frac{1}{2}$.
 - **Point** : $x = 2 - 1,5 = 0,5$, $y = 1 + 0,5 = 1,5$, $z = -1 - 1 = -2$.
 $H(0,5; 1,5; -2)$
 - **Vérification** : $1,5 - 1,5 - 4 + 4 = 0 \checkmark$
 - **Distance de A au plan** : $\frac{|6 - 1 - 2 + 4|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \approx 1,871.$
 - **Contrôle** : $|\overrightarrow{AH}| = |t| \times \|\vec{n}\| = \frac{1}{2}\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1,871 \checkmark$ — H est bien le projeté orthogonal de A .
- Réponse.** $x = 2 + 3t$, $y = 1 - t$, $z = -1 + 2t$; $H(0,5; 1,5; -2)$.

Correction de l'exercice 12 - Plans parallèles

- **Normaux** : $\vec{n}_1(2; -4; 6)$ et $\vec{n}_2(-1; 2; -3)$.
 - **Colinéarité** : $\vec{n}_1 = -2\vec{n}_2 \checkmark$ — les plans sont **parallèles**.
 - **Confondus ?** En multipliant Q par -2 : $2x - 4y + 6z = -10$, alors que P donne 1. Les plans sont donc **strictement parallèles**.
 - **Distance** : on prend un point de Q , par exemple $M(-5; 0; 0)$ (car $-(-5) = 5 \checkmark$).

$$d = \frac{|2 \times (-5) - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 16 + 36}} = \frac{11}{\sqrt{56}} \approx 1,470$$
 - **Contrôle avec un autre point de Q** : $N(0; \frac{5}{2}; 0)$ vérifie $2 \times \frac{5}{2} = 5 \checkmark$
 - $d = \frac{|0 - 10 - 1|}{\sqrt{56}} = \frac{11}{\sqrt{56}} \checkmark$ — même valeur, comme attendu entre deux plans parallèles.
 - **Simplification** : $\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$, donc $d = \frac{11}{2\sqrt{14}} \approx 1,470.$
- Réponse.** Strictement parallèles, distance $\frac{11}{2\sqrt{14}} \approx 1,47.$

Correction de l'exercice 13 - Intersection dans un cube

- **Coordonnées** : $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$.
- **Plan (BDE)** : les trois points ont une somme de coordonnées égale à 1, donc

$$(BDE): x + y + z = 1$$

— **Vérifications** : B, D et E donnent $1 = 1$ ✓

— **Droite** (AG) : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

— **Substitution** : $3t = 1$, donc $t = \frac{1}{3}$.

$$I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

— **Interprétation** : I est le **centre de gravité** du triangle BDE — cohérent avec la symétrie de la figure ($\frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}$ sur chaque coordonnée) ✓

— **Position sur la diagonale** : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ — le plan coupe la grande diagonale au **tiers**.

— **Perpendicularité** : $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ est le vecteur **normal** de (BDE) , donc (AG) est **perpendiculaire** au plan (BDE) ✓

Réponse. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, centre de gravité de BDE , au tiers de $[AG]$.

Correction de l'exercice 14 - Plan parallèle à une droite

— **Conditions sur le normal** $\vec{n}(a; b; c)$:

— **Parallèle à D** : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, soit $a + b + c = 0$.

— **Perpendiculaire à Q** : $\vec{n}$ doit être orthogonal à $\vec{n}_Q(1; -1; 0)$, soit $a - b = 0$, donc $b = a$.

— En reportant : $2a + c = 0$, donc $c = -2a$. Avec $a = 1$: $\vec{n}(1; 1; -2)$.

— **Équation** : $x + y - 2z + d = 0$; avec A : $1 + 0 - 4 + d = 0$, donc $d = 3$.

$$P: x + y - 2z + 3 = 0$$

— **Vérifications** : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 + 1 - 2 = 0$ ✓ (parallèle à D) et $\vec{n} \cdot \vec{n}_Q = 1 - 1 + 0 = 0$ ✓ (perpendiculaire à Q).

— **Contrôle du point** : $1 + 0 - 4 + 3 = 0$ ✓

— **Nuance** : « P perpendiculaire à Q » se traduit par **normaux orthogonaux**, tandis que « P parallèle à D » se traduit par **normal orthogonal au directeur** — deux conditions de même forme, mais issues de géométries différentes.

Réponse. $x + y - 2z + 3 = 0$.

Correction de l'exercice 15 - Sphère et plan tangent

— **Distance du centre au plan** :

$$d = \frac{|2 + 2 + 2 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{3} \approx 1,667$$

— **Comparaison au rayon** : $\frac{5}{3} < 3$.

— **Conclusion** : le plan est **sécant** — il coupe la sphère suivant un **cercle**.

— **Rayon du cercle d'intersection** (Pythagore) :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{56}{9}} = \frac{\sqrt{56}}{3} \approx 2,494$$

— **Centre du cercle** : le projeté de Ω , soit $\Omega + t\vec{n}$ avec $\vec{n}(2; 1; -2)$:
 $2(1 + 2t) + (2 + t) - 2(-1 - 2t) - 1 = 5 + 9t = 0$, donc $t = -\frac{5}{9}$.

- **Contrôle** : $|t| \times \|\vec{n}\| = \frac{5}{9} \times 3 = \frac{5}{3} \checkmark$ — cohérent avec la distance.
- **Les trois cas** : $d > R$ disjoints · $d = R$ **tangent** (un seul point) · $d < R$ **sécants** (un cercle).

Réponse. Sécant : $d = \frac{5}{3} < 3$, cercle de rayon $\frac{\sqrt{56}}{3} \approx 2,49$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : tétraèdre et hauteur

a) **Plan** (ABC) : il coupe les axes en 1, 2 et 3, d'où l'équation « par les intercepts »

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \iff 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

— **Vérifications** : A donne $6 - 6 = 0 \checkmark$, B donne $6 - 6 = 0 \checkmark$, C donne $6 - 6 = 0 \checkmark$

b) **Distance de D** :

$$d = \frac{|6 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3 - 6|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{|6 + 6 + 6 - 6|}{7} = \frac{12}{7} \approx 1,714$$

— **Contrôle du dénominateur** : $\sqrt{49} = 7$ exactement — les coefficients $(6; 3; 2)$ forment un triplet de norme entière.

c) **Volume** :

$$V = \frac{\text{aire}(ABC) \times d}{3} = \frac{\frac{7}{2} \times \frac{12}{7}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

— **Contrôle indépendant** : avec $\overrightarrow{AB}(-1; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 3)$ et $\overrightarrow{AD}(0; 2; 3)$, le volume vaut $\frac{1}{6}$ du déterminant.

— $\det = -1(0 \times 3 - 3 \times 2) - 2(-1 \times 3 - 3 \times 0) + 0 = -1 \times (-6) - 2 \times (-3) = 6 + 6 = 12$.

— $V = \frac{12}{6} = 2 \checkmark$ — les deux méthodes concordent.

— **Vérification de l'aire donnée** : $\frac{3V}{d} = \frac{6}{12/7} = \frac{42}{12} = \frac{7}{2} \checkmark$

Réponse. a) $6x + 3y + 2z = 6$ · b) $d = \frac{12}{7}$ · c) $V = 2$.