

Plaquette 4 - Intersections — problèmes type bac

Droites et plans dans l'espace — Terminale spé maths

Exercices

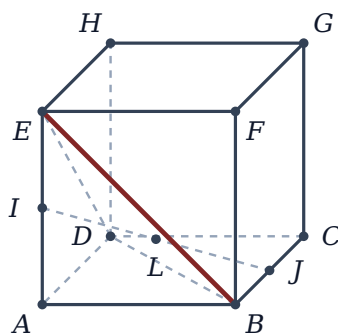
Méthode

Un problème de géométrie dans l'espace se résout en **enchaînant** les outils : choisir un repère adapté (souvent le cube), traduire chaque objet (droite par une **représentation paramétrique**, plan par une **équation cartésienne**), puis calculer les intersections par **substitution**. On contrôle chaque point trouvé en le remplaçant dans les équations, et on interprète le résultat sur la figure.

Exercice 1 - Une droite traverse un triangle du cube

$ABCDEFGH$ est un cube repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$; I est le milieu de $[AE]$ et J celui de $[BC]$. On admet que $(BDE): x + y + z = 1$.

- Donner une représentation paramétrique de (IJ) .
- Déterminer le point d'intersection L de (IJ) et (BDE) . Est-il à l'intérieur du triangle BDE ?

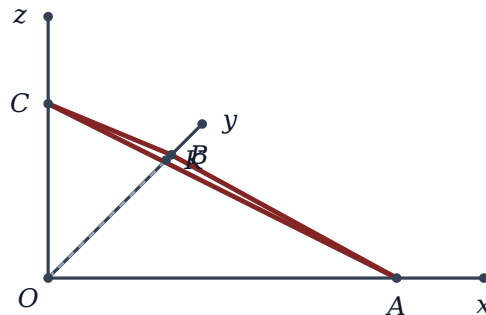


La droite (IJ) et le triangle BDE

Exercice 2 – Un tétraèdre et une droite issue de l'origine

On considère $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ et $C(0; 0; 2)$ dans un repère orthonormé.

- Montrer que $(ABC):x + y + 2z = 4$.
- Déterminer le point K où la droite $D:(t; t; t)$ coupe le plan (ABC) .
- Le vecteur $(1; 1; 1)$ est-il normal au plan ?

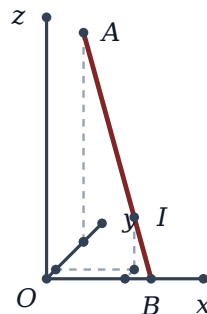


Le plan (ABC) et la droite (OK)

Exercice 3 – Où une droite traverse-t-elle un plan ?

On donne $A(0; 2; 4)$, $B(2; 0; 0)$ et le plan $P:x + y + z = 3$.

- Donner une représentation paramétrique de (AB) .
- Déterminer le point I d'intersection de (AB) et P . Appartient-il au segment $[AB]$?



Le segment $[AB]$ et son point I dans le plan

Exercice 4 – Projeté et symétrique

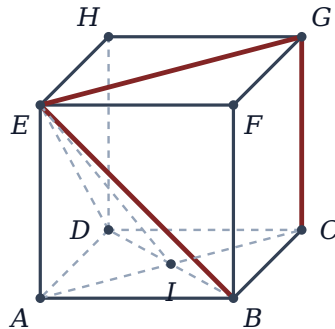
Soit $P:x + y + z = 3$ et $M(3; 3; 3)$.

- Déterminer le projeté orthogonal H de M sur P .
- En déduire le symétrique M' de M par rapport à P et la distance de M au plan.

Exercice 5 – L'intersection de deux plans du cube

$ABCDEFGH$ est un cube repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On admet que $(BDE): x + y + z = 1$ et $(ACG): x - y = 0$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta = (BDE) \cap (ACG)$.
- Montrer que Δ passe par E et par le centre I de la face $ABCD$.

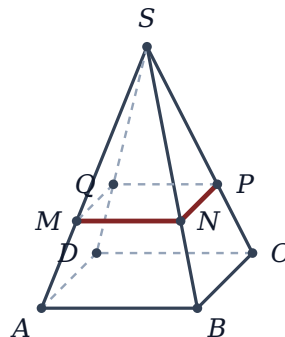


Les plans (BDE) et (ACG) se coupent selon (EI)

Exercice 6 – Couper une pyramide

$SABCD$ est une pyramide avec $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(2; 2; 0)$, $D(0; 2; 0)$ et $S(1; 1; 3)$. Pour $h \in]0; 3[$, on coupe la pyramide par le plan $P_h: z = h$.

- Déterminer l'intersection de P_h avec l'arête $[SB]$.
- En déduire le côté et l'aire de la section, en fonction de h .



La section par le plan $z = h$ (ici $h = 1$)

Exercice 7 – Quatre points coplanaires

On donne $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(1; 2; 2)$ et $D(3; 2; 1)$.

- Montrer que A, B, C définissent un plan et que $\vec{n}(1; -1; 2)$ lui est normal.
- En déduire une équation de (ABC) et montrer que D appartient à ce plan.

Exercice 8 – Un rayon laser

Un laser placé en $L(1; 1; 5)$ émet un rayon dans la direction $\vec{u}(1; 2; -5)$ (repère orthonormé, unité : le mètre, le sol étant le plan $z = 0$).

- En quel point le rayon frappe-t-il le sol ?

b) Un mur a pour équation $x = 1,5$. Le rayon le rencontre-t-il avant d'atteindre le sol ?

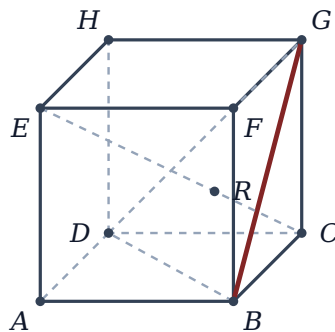
Exercice 9 – Trois plans concourants

Déterminer l'intersection des trois plans $P_1: x + y + z = 6$, $P_2: x - y = 0$ et $P_3: z = 2$.

Exercice 10 – Une diagonale perce un plan oblique

$ABCDEFGH$ est un cube repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- Montrer que $\vec{n}(1; 1; -1)$ est normal au plan (BDG) et en donner une équation.
- Déterminer le point d'intersection de la droite (EC) avec le plan (BDG) .



Le triangle BDG et la diagonale (EC)

Exercice 11 – L'ombre d'un poteau

Un poteau vertical relie $P(2; 1; 0)$ (au sol) à son sommet $T(2; 1; 3)$. Les rayons du soleil sont parallèles au vecteur $\vec{u}(1; 1; -2)$; le sol est le plan $z = 0$ (repère orthonormé, unité le mètre).

- Déterminer l'ombre T' du sommet sur le sol.
- Calculer la longueur de l'ombre du poteau.

Exercice 12 – Hauteur d'un tétraèdre

On considère le plan $P: 2x + y + 2z = 7$ et le point $A(3; 2; 4)$.

- Déterminer le projeté orthogonal H de A sur P .
- En déduire la distance de A au plan. Si A est le sommet d'un tétraèdre dont la base (dans P) a une aire de 6, quel est son volume ?

Exercice 13 – Un plan d'une famille contenant une droite

Pour tout réel m , on considère le plan $P_m: x + my + z = 2$ et la droite $D: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$.

- Déterminer m pour que D soit contenue dans P_m .
- Pour les autres valeurs de m , quelle est la position de D par rapport à P_m ?

Exercice 14 – Deux droites selon un paramètre

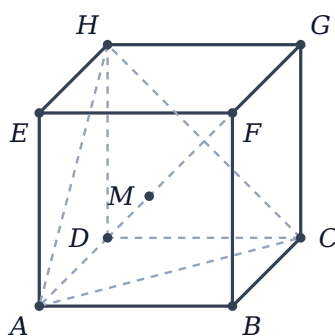
Pour tout réel m , on considère $D: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ et $D'_m: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 - s \\ z = m + s \end{cases}$.

Déterminer m pour que les droites soient sécantes, et préciser leur point commun.
Que se passe-t-il sinon ?

Exercice 15 – Une diagonale perpendiculaire à un plan

$ABCDEFGH$ est un cube repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- Déterminer une équation du plan (ACH) .
- Montrer que la droite (DF) est perpendiculaire à (ACH) et déterminer leur point d'intersection M .



Le triangle ACH et la diagonale (DF)