

Plaquette 1 - Définition, propriétés et calculs

Fonction exponentielle — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$: c'est la fonction exponentielle, notée $x \mapsto e^x$, avec $e = e^1 \approx 2,718$.

Relation fonctionnelle et conséquences (pour tous réels a, b et tout entier n) :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^n = e^{na}$$

Signe : $e^x > 0$ pour tout réel x ; le signe de $u(x)e^{v(x)}$ est donc celui de $u(x)$.

Lien avec le logarithme : $e^{\ln a} = a$ ($a > 0$) et $\ln(e^x) = x$.

Suites : $u_n = e^{kn}$ est géométrique de raison e^k .

⚠ $e^{a+b} \neq e^a + e^b$ et $e^{2x} \neq 2e^x$: on a $e^{2x} = (e^x)^2$.

Correction de l'exercice 1 - Calculer avec les exposants

On applique les règles de calcul, identiques à celles des puissances :

$$e^a e^b = e^{a+b} \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad (e^a)^n = e^{na}$$

a) $e^{3+(-5)} = e^{-2}$.

b) $e^{2 \times 3} = e^6$.

c) $e^{5-2} = e^3$.

d) Le numérateur vaut e^{-2} , donc le quotient vaut $e^{-2-(-4)} = e^2$.

— **Piège en d)** : soustraire un exposant **néglatif** revient à l'ajouter.

Réponse. a) e^{-2} · b) e^6 · c) e^3 · d) e^2 .

Correction de l'exercice 2 - Simplifier des expressions en x

On regroupe tout en **une seule exponentielle**, en additionnant ou soustrayant les exposants.

a) $A = e^{2x+(-x)} = e^x$.

b) $(e^x)^2 = e^{2x}$, donc

$$B = \frac{e^{2x}}{e^{2x-1}} = e^{2x-(2x-1)} = e^1 = e$$

c) $C = e^{(x+1)-(x-1)} = e^2$.

— **Remarque** : B et C ne dépendent **pas** de x ; ce sont des constantes.

— **Piège en b)** : les parenthèses autour de $2x - 1$ sont indispensables lors de la soustraction.

Réponse. $A = e^x$, $B = e$, $C = e^2$.

Correction de l'exercice 3 - Identités remarquables

On utilise les identités remarquables, avec $(e^x)^2 = e^{2x}$ et $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$.

a) Calcul :

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$$

b) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ donne $e^{2x} - 1$.

c) C'est $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = e^x$ et $b = 1$: $(e^x - 1)^2$.

— **Réflexe** : repérer que e^{2x} est le **carré** de e^x ; c'est la clé des changements de variable $X = e^x$.

Réponse. a) $e^{2x} + 2 + e^{-2x}$ · b) $e^{2x} - 1$ · c) $(e^x - 1)^2$.

Correction de l'exercice 4 - Deux écritures d'une même fonction

On part du membre de gauche et on **multiplie numérateur et dénominateur par e^x** (qui n'est jamais nul) :

$$\frac{(e^x - e^{-x})e^x}{(e^x + e^{-x})e^x} = \frac{e^{2x} - e^0}{e^{2x} + e^0} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

— On a utilisé $e^x \times e^x = e^{2x}$ et $e^{-x} \times e^x = e^0 = 1$.

— **Existence** : les dénominateurs $e^x + e^{-x}$ et $e^{2x} + 1$ sont strictement positifs.

— **Intérêt** : la seconde forme ne contient qu'une exponentielle ; elle est plus pratique pour une limite ou un changement de variable.

— **Contrôle** en $x = 0$: les deux membres valent 0 ✓

Réponse. On multiplie en haut et en bas par e^x .

Correction de l'exercice 5 - Étudier un signe

On utilise deux faits :

$$e^x > 0 \text{ pour tout } x \quad e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

(la seconde vient de la stricte croissance et de $e^0 = 1$).

a) $e^x > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $x - 2$: négatif sur $] -\infty ; 2[$, positif sur $]2 ; +\infty[$.

b) $g(x) > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$: positif sur $] -\infty ; 0[$, négatif sur $]0 ; +\infty[$.

c) On croise les signes :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Réponse. a) signe de $x - 2$ · b) > 0 ssi $x < 0$ · c) $h > 0$ sur $] -3 ; 0[$ seulement.

Correction de l'exercice 6 - Parité

a) On remplace x par $-x$, avec $-(-x) = x$:

$$f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x) \quad g(-x) = e^{-x} - e^x = -g(x)$$

— f est **paire** ; g est **impaire**.

b) La courbe de f est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** ; celle de g est **symétrique par rapport à l'origine**.

— **Conséquences** : $f(0) = 2$ est le minimum de f ; $g(0) = 0$.

- **Culture** : $\frac{f}{2}$ et $\frac{g}{2}$ sont le cosinus et le sinus **hyperboliques** ; la courbe de $\frac{f}{2}$ est la forme d'un câble suspendu entre deux poteaux (la chaînette).

Réponse. $f(-x) = f(x)$: f paire ; $g(-x) = -g(x)$: g impaire.

Correction de l'exercice 7 - Démontrer les règles de calcul

a) Avec $b = -a$:

$$e^{a+(-a)} = e^a e^{-a} \quad \text{soit} \quad e^0 = 1 = e^a e^{-a}$$

e^a n'est pas nul (le produit vaut 1), on peut diviser : $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.

b) Soit $P(n)$: « $(e^a)^n = e^{na}$ ».

— **Initialisation** : $(e^a)^0 = 1 = e^0$ ✓

— **Hérédité** : si $(e^a)^n = e^{na}$, alors

$$(e^a)^{n+1} = (e^a)^n e^a = e^{na} e^a = e^{na+a} = e^{(n+1)a}$$

— **Conclusion** : la propriété est vraie pour tout n .

— **Bonus** : a) montre au passage que $e^a \neq 0$; avec $e^a = (e^{a/2})^2 \geq 0$, on retrouve $e^a > 0$.

Réponse. $e^a e^{-a} = 1$; récurrence avec $e^{na} e^a = e^{(n+1)a}$.

Correction de l'exercice 8 - Une suite d'exponentielles

a) Calcul :

$$u_{n+1} = e^{-0,5(n+1)} = e^{-0,5n} \times e^{-0,5} = e^{-0,5} u_n$$

(u_n) est géométrique de raison $q = e^{-0,5} \approx 0,607$ et de premier terme $u_0 = 1$.

b) $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$: la suite est **strictement décroissante** et tend vers 0.

c) Somme de 10 termes d'une suite géométrique :

$$— S = u_0 \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = \frac{1 - e^{-5}}{1 - e^{-0,5}} ;$$

$$— \text{numériquement, } S \approx \frac{0,9933}{0,3935} \approx 2,524.$$

— **À retenir** : $e^{kn} = (e^k)^n$; toute suite de cette forme est géométrique.

Réponse. Raison $e^{-0,5}$; décroissante, limite 0 ; $S \approx 2,524$.

Correction de l'exercice 9 - Approcher le nombre e

a) Chaque pas multiplie la valeur par $1 + h = 1,1$. Il faut 10 pas pour aller de 0 à 1 :

$$f(1) \approx 1,1^{10} \approx 2,594$$

— L'erreur est d'environ 0,12 ; avec $h = 0,01$, on obtiendrait $1,01^{100} \approx 2,705$, plus proche.

— En faisant tendre h vers 0 : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$.

b) $1 + 1 + 0,5 + 0,16667 + 0,04167 + 0,00833 \approx 2,71667$.

— L'écart avec e n'est que de 0,0016 : cette somme des $\frac{1}{k!}$ converge **beaucoup plus vite** que la méthode d'Euler.

— **Culture** : $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$; c'est ainsi que l'on calcule ses décimales.

Réponse. a) $1,1^{10} \approx 2,594$ · b) $\approx 2,7167$, très proche de e .

Correction de l'exercice 10 - Une inégalité fondamentale

a) Avec $x = 0,5$: $e^{0,5} \geq 1,5$; avec $x = -0,1$: $e^{-0,1} \geq 0,9$.

b) L'inégalité appliquée à $-x$ donne $e^{-x} \geq 1 - x$. Pour $x < 1$, $1 - x > 0$ et l'on peut passer à l'inverse (fonction décroissante sur $]0; +\infty[$) :

$$\frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{soit} \quad e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

c) Avec $x = 0,1$:

— $e^{0,1} \geq 1,1$;

— $e^{0,1} \leq \frac{1}{0,9} \approx 1,1111$.

$$1,1 \leq e^{0,1} \leq 1,112$$

— **Contrôle** : $e^{0,1} \approx 1,1052$ ✓

Réponse. $1,1 \leq e^{0,1} \leq \frac{1}{0,9} \approx 1,111$.

Correction de l'exercice 11 - Exponentielle et logarithme

On utilise $e^{a+b} = e^a e^b$ et les réciprociétés

$$e^{\ln a} = a \quad (a > 0) \quad \ln(e^x) = x$$

a) $e^{\ln 3} \times e^{2 \ln 2} = 3 \times e^{\ln 4} = 3 \times 4 = 12$.

b) $-2 \ln 5 = \ln \frac{1}{25}$, donc $e^{-2 \ln 5} = \frac{1}{25}$.

c) $e^3 \sqrt{e} = e^3 e^{1/2} = e^{7/2}$, donc le logarithme vaut $\frac{7}{2}$.

d) $e^x e^{\ln x} = x e^x$.

— **Réflexe** : un coefficient devant $\ln$ devient un **exposant** avant de « traverser » l'exponentielle.

Réponse. a) 12 · b) $\frac{1}{25}$ · c) $\frac{7}{2}$ · d) $x e^x$.

Correction de l'exercice 12 - La famille des exponentielles e puissance kx

a) Composée avec la fonction affine $x \mapsto kx$:

$$f(x) = k e^{kx} = k f(x)$$

b) $f(a+b) = e^{k(a+b)} = e^{ka+kb} = e^{ka} e^{kb} = f(a) f(b)$.

c) $e^k = 2 \Leftrightarrow k = \ln 2 \approx 0,693$.

— Alors $f(x) = e^{x \ln 2} = (e^{\ln 2})^x = 2^x$: on retrouve la fonction « puissance de 2 ».

— **À retenir** : toute fonction $x \mapsto a^x$ ($a > 0$) s'écrit $e^{x \ln a}$; c'est ainsi qu'on la dérive : $(a^x)' = \ln a \times a^x$.

Réponse. a) $f' = k f$ · b) $e^{k(a+b)} = e^{ka} e^{kb}$ · c) $k = \ln 2$.

Correction de l'exercice 13 - Croissance d'une population de bactéries

a) $N(0) = 1\,000 e^0 = 1\,000$ bactéries.

$N(10) = 1\,000 e^3 \approx 20\,086$ bactéries.

b) Avec la relation fonctionnelle :

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{e^{0,3t+0,3}}{e^{0,3t}} = e^{0,3} \approx 1,35$$

- Le rapport ne dépend **pas** de t : chaque heure, la population est multipliée par 1,35, soit une **hausse de 35 % par heure**.
- **Interprétation** : une croissance exponentielle est une croissance à **taux constant** ; aux instants entiers, N forme une suite géométrique de raison $e^{0,3}$.

Réponse. a) 1 000 et $\approx 20\,086$ · b) $e^{0,3} \approx 1,35$: +35 % par heure.

Correction de l'exercice 14 - Deux erreurs à ne pas faire

a) **Première égalité**, avec $a = b = 0$: $e^0 = 1$, alors que $e^0 + e^0 = 2$. Faux.

Seconde égalité, avec $x = 1$: $e^2 \approx 7,39$, alors que $2e \approx 5,44$. Faux.

b) Les formules correctes sont :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad e^{2x} = (e^x)^2$$

- L'exponentielle transforme une **somme** en **produit**, et un **produit par 2** de l'exposant en **carré**.
- **Parallèle** : c'est la même chose qu'avec les puissances, $10^{2+3} = 10^2 \times 10^3$ et non $10^2 + 10^3$.

Réponse. $e^{a+b} = e^a e^b$ et $e^{2x} = (e^x)^2$.

Correction de l'exercice 15 - Cosinus et sinus hyperboliques

a) On développe, avec $e^x e^{-x} = 1$:

$$— C(x)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} ;$$

$$— S(x)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}.$$

$$C(x)^2 - S(x)^2 = \frac{2 - (-2)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Autre méthode : $C^2 - S^2 = (C - S)(C + S) = e^{-x} \times e^x = 1$.

b) La dérivée de e^{-x} est $-e^{-x}$:

$$— C'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = S(x) ;$$

$$— S'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = C(x).$$

- **Analogie** : comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$ pour le cercle, $C^2 - S^2 = 1$ décrit une **hyperbole** — d'où le nom « hyperboliques ».

Réponse. $C^2 - S^2 = 1$; $C' = S$ et $S' = C$.