

Plaquette 2 - Dérivée et variations

Fonction exponentielle — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées :

$$(e^x)' = e^x \quad (e^{ax+b})' = a e^{ax+b} \quad (e^u)' = u' e^u$$

Variations : $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; e^u a les mêmes variations que u .

Réflexe de signe : dans $f(x) = P(x) e^{v(x)}$, le signe de $f(x)$ est celui de $P(x)$.

Tangente en 0 : $y = x + 1$. La courbe est **au-dessus** : $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x .

Convexité : $\exp'' = \exp > 0$, la fonction est **convexe** : sa courbe est au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

Point d'inflexion : point où la dérivée seconde **s'annule en changeant de signe** ; la courbe y traverse sa tangente.

Rappels : $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; tangente en a : $y = f(a)(x - a) + f(a)$.

Correction de l'exercice 1 - Produit par une fonction affine

a) $f = uv$ avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$, et $v(x) = v'(x) = e^x$:

$$f'(x) = 2e^x + (2x - 1)e^x = (2x + 1)e^x$$

b) $e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2x + 1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		décroissante	$-2e^{-1/2}$	croissante	

— **Minimum** : $f\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1 - 1)e^{-1/2} = -2e^{-1/2} \approx -1,213$.

— **Réflexe** : on met e^x en facteur **avant** d'étudier le signe.

Réponse. $f(x) = (2x + 1)e^x$; minimum $-2e^{-1/2} \approx -1,21$ en $-\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Deux extremums

a) Dérivée d'un produit, avec $(x^2)' = 2x$:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x = x(x + 2)e^x$$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x + 2)$, trinôme positif à l'extérieur des racines -2 et 0 .

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		croissante	$4e^{-2}$	décroissante	0	croissante	

— **Maximum local** : $f(-2) = 4e^{-2} \approx 0,541$.

— **Minimum** : $f(0) = 0$ — c'est même le minimum **global**, puisque $f(x) = x^2 e^x \geq 0$ partout.

Réponse. Maximum local $4e^{-2}$ en -2 , minimum 0 en 0 .

Correction de l'exercice 3 - Un quotient

a) Formule du quotient, $u = e^x$, $v = x$:

$$f(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

b) Le signe de $f(x)$ est celui de $x-1$: f est décroissante sur $]0; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$.

— **Minimum** : $f(1) = e$.

— Pour tout $x > 0$: $\frac{e^x}{x} \geq e$, et en multipliant par $x > 0$, $e^x \geq ex$.

— **Interprétation** : la droite $y = ex$ est la tangente à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse 1 ; la courbe est au-dessus.

Réponse. Minimum e en 1 , d'où $e^x \geq ex$ pour $x > 0$.

Correction de l'exercice 4 - Avec e puissance moins x

a) Produit uv avec $u(x) = x+1$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$:

$$f(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$$

b) $e^{-x} > 0$: $f(x)$ a le signe de $-x$.

— f est **croissante** sur $] -\infty; 0]$ et **décroissante** sur $[0; +\infty[$.

— **Maximum** : $f(0) = 1 \times e^0 = 1$.

— **Conséquence** : $(x+1)e^{-x} \leq 1$, soit $x+1 \leq e^x$ — on retrouve l'inégalité fondamentale.

— **Piège** : la dérivée de e^{-x} est $-e^{-x}$, pas e^{-x} .

Réponse. $f(x) = -xe^{-x}$; maximum 1 en 0 .

Correction de l'exercice 5 - La tangente en zéro

a) $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = e^0 = 1$:

$$T: y = 1 \times (x-0) + 1 = x+1$$

b) $g'(x) = e^x - 1$, positif si et seulement si $e^x > 1$, c'est-à-dire $x > 0$.

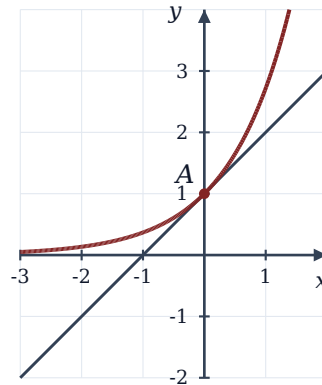
— g est **décroissante** sur $] -\infty; 0]$, **croissante** sur $[0; +\infty[$.

— **Minimum** : $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.

c) Pour tout réel x , $g(x) \geq 0$, soit $e^x \geq x+1$: la courbe est **au-dessus** de sa tangente T , et ne la touche qu'en $A(0; 1)$.

- **Tracé** : T passe par $(-3; -2)$ et $(2; 3)$.
- **Usage** : pour x proche de 0, $e^x \approx 1 + x$ (approximation affine).

Réponse. $T: y = x + 1$; $g \geq g(0) = 0$, donc $e^x \geq x + 1$.



Tangente $T: y = x + 1$ en $A(0; 1)$, sous la courbe

Correction de l'exercice 6 - Tangente issue de l'origine

a) $\exp(a) = \exp'(a) = e^a$, donc

$$T_a: y = e^a(x - a) + e^a = e^a x + e^a(1 - a)$$

b) T_a passe par $O(0; 0)$ si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle :

— $e^a(1 - a) = 0 \Leftrightarrow 1 - a = 0$ (car $e^a \neq 0$) $\Leftrightarrow a = 1$.

— Alors $T_1: y = ex$.

— **Contrôle** : T_1 passe par $(1; e)$, point de la courbe, avec la pente e ✓

— **Lien** : c'est la « symétrique » de la tangente $y = \frac{x}{e}$ au logarithme, issue elle aussi de l'origine — les courbes de $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Réponse. $T_a: y = e^a x + e^a(1 - a)$; $a = 1$, $T_1: y = ex$.

Correction de l'exercice 7 - Convexité et cordes

a) La dérivée seconde de $\exp$ est $\exp$ elle-même :

$$\exp''(x) = e^x > 0$$

La fonction est **convexe** sur $\mathbb{R}$.

b) Une fonction convexe a sa courbe **sous ses cordes**. Sur la corde joignant les points $A(a; e^a)$ et $B(b; e^b)$, le milieu a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{e^a + e^b}{2}\right)$.

— Le point de la courbe de même abscisse, d'ordonnée $e^{\frac{a+b}{2}}$, est en dessous de ce milieu : d'où l'inégalité.

— **Lecture** : l'exponentielle de la moyenne est inférieure à la moyenne des exponentielles.

— **Contrôle** avec $a = 0$, $b = 2$: $e^1 \approx 2,72 \leq \frac{1 + 7,39}{2} \approx 4,19$ ✓

Réponse. $\exp'' = \exp > 0$: courbe sous ses cordes, d'où l'inégalité.

Correction de l'exercice 8 - L'exponentielle domine x

a) $f(x) = 1 - e^x$, positif si et seulement si $e^x < 1$, soit $x < 0$.

— f est **croissante** sur $] -\infty ; 0]$ et **décroissante** sur $[0 ; +\infty[$.

— **Maximum** :

$$f(0) = 0 - 1 = -1$$

b) Pour tout réel x , $f(x) \leq -1 < 0$, soit $x - e^x < 0 : e^x > x$.

— **Remarque** : c'est une conséquence plus faible de $e^x \geq x + 1$; la courbe de $\exp$ est même au moins à la distance verticale 1 au-dessus de la droite $y = x$.

— **Méthode** : pour comparer deux fonctions, on étudie **leur différence**.

Réponse. Maximum $f(0) = -1 < 0$, donc $e^x > x$.

Correction de l'exercice 9 - La fonction logistique

a) $f = \frac{1}{v}$ avec $v(x) = 1 + e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$:

$$f(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0$$

f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

b) $f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

En multipliant en haut et en bas par e^x : $f(-x) = \frac{1}{1+e^x}$ et $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. Donc

— $f(x) + f(-x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1$.

Interprétation : les points d'abscisses x et $-x$ ont des ordonnées de moyenne $\frac{1}{2}$; la courbe est **symétrique par rapport au point** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

— **Usage** : cette courbe « en S » modélise les croissances qui saturent (épidémies, ventes d'un nouveau produit).

Réponse. $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0$; centre de symétrie $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 10 - La courbe en cloche

a) Avec $u(x) = -\frac{x^2}{2}$, $u'(x) = -x$:

$$f(x) = -xe^{-x^2/2}$$

Le signe est celui de $-x$: f croît sur $] -\infty ; 0]$, décroît sur $[0 ; +\infty[$; **maximum** $f(0) = 1$.

b) On dérive le produit $-x \times e^{-x^2/2}$:

— $f'(x) = -e^{-x^2/2} + (-x)(-x)e^{-x^2/2} = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$.

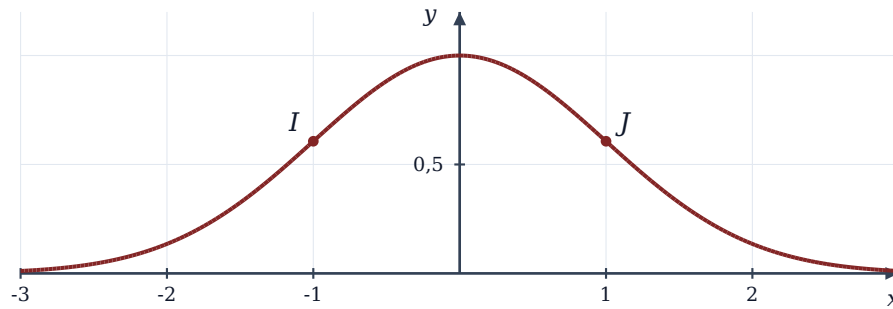
— Le signe est celui de $x^2 - 1$: positif hors de $[-1 ; 1]$, négatif dedans.

— f est **convexe** sur $] -\infty ; -1]$ et sur $[1 ; +\infty[$, **concave** sur $[-1 ; 1]$.

— f' s'annule en changeant de signe en ± 1 : **points d'inflexion** $I(-1; e^{-1/2})$ et $J(1; e^{-1/2})$, avec $e^{-1/2} \approx 0,61$.

— **Culture** : c'est, à une constante près, la densité de la loi normale ; les inflexions sont à un écart-type de la moyenne.

Réponse. Maximum 1 en 0 ; concave sur $[-1; 1]$, convexe ailleurs ; inflexions en ± 1 .



Courbe en cloche : maximum en 0, inflexions en I et J

Correction de l'exercice 11 - Combien de solutions ?

a) $h'(x) = e^x - 3$, positif si et seulement si $e^x > 3$, c'est-à-dire $x > \ln 3$.

— h est décroissante sur $] -\infty; \ln 3]$, croissante sur $[\ln 3; +\infty[$.

— **Minimum** :

$$h(\ln 3) = e^{\ln 3} - 3 \ln 3 = 3 - 3 \ln 3 = 3(1 - \ln 3) \approx -0,296$$

négatif car $\ln 3 > 1$ (puisque $3 > e$).

b) On applique le **corollaire du TVI** sur chaque intervalle de monotonie :

— sur $] -\infty; \ln 3]$, h est continue, strictement décroissante, de $+\infty$ à $h(\ln 3) < 0$: **une** solution ;

— sur $[\ln 3; +\infty[$, strictement croissante de $h(\ln 3) < 0$ à $+\infty$: **une** solution.

L'équation $e^x = 3x$ a **exactement deux** solutions ($\approx 0,62$ et $\approx 1,51$).

Réponse. Minimum $3 - 3 \ln 3 < 0$: deux solutions.

Correction de l'exercice 12 - Une famille de fonctions

a) $f_k'(x) = e^x - k$, positif si et seulement si $x > \ln k$.

— f_k décroît sur $] -\infty; \ln k]$ et croît sur $[\ln k; +\infty[$.

— **Minimum** :

$$f_k(\ln k) = e^{\ln k} - k \ln k = k - k \ln k = k(1 - \ln k)$$

b) $e^x > kx$ pour tout x équivaut à : le minimum de f_k est **strictement positif**.

— $k(1 - \ln k) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln k > 0$ (car $k > 0$) $\Leftrightarrow \ln k < 1 \Leftrightarrow k < e$.

Conclusion : pour $0 < k < e$, la courbe de $\exp$ est strictement au-dessus de la droite $y = kx$. Pour $k = e$, elles se touchent en $x = 1$ (tangente issue de l'origine) ; pour $k > e$, la droite coupe la courbe.

Réponse. Minimum $k(1 - \ln k)$; $e^x > kx$ pour tout x si et seulement si $0 < k < e$.

Correction de l'exercice 13 - Concentration d'un médicament

a) Produit de $5t$ (dérivée 5) et de $e^{-0,5t}$ (dérivée $-0,5e^{-0,5t}$) :

$$C'(t) = 5e^{-0,5t} + 5t \times (-0,5e^{-0,5t}) = 5e^{-0,5t}(1 - 0,5t)$$

b) $5e^{-0,5t} > 0$: le signe de $C'(t)$ est celui de $1 - 0,5t$, positif pour $t < 2$.

- C croît sur $[0 ; 2]$ puis décroît : la concentration est **maximale** à $t = 2$ h.
- $C(2) = 10 e^{-1} = \frac{10}{e} \approx 3,68$ mg/L.
- **Interprétation** : le médicament passe d'abord dans le sang (phase d'absorption), puis est éliminé ; le facteur t domine au début, l'exponentielle décroissante ensuite.

Réponse. $C(t) = 5e^{-0,5t}(1 - 0,5t)$; maximum $\frac{10}{e} \approx 3,68$ mg/L à $t = 2$ h.

Correction de l'exercice 14 - Point d'inflexion

a) Dérivée d'un produit :

$$f(x) = e^x + x e^x = (x + 1) e^x$$

On dérive encore : $f'(x) = e^x + (x + 1) e^x = (x + 2) e^x$.

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x + 2$:

- f est **concave** sur $] -\infty ; -2]$ ($f'' \leq 0$) ;
- f est **convexe** sur $[-2 ; +\infty[$ ($f'' \geq 0$).

f' s'annule en changeant de signe en -2 : le point $(-2 ; -2e^{-2})$, avec $-2e^{-2} \approx -0,27$, est un **point d'inflexion**.

- **Remarque** : f a son minimum en -1 (où f s'annule), et son inflexion en -2 (où f' s'annule) — deux points distincts, à ne pas confondre.

Réponse. $f(x) = (x + 1)e^x$, $f'(x) = (x + 2)e^x$; inflexion en $x = -2$.

Correction de l'exercice 15 - Fixer le bon prix

a) Produit de $1\,000p$ et de $e^{-0,05p}$:

$$R'(p) = 1\,000 e^{-0,05p} + 1\,000p \times (-0,05)e^{-0,05p} = 1\,000 e^{-0,05p}(1 - 0,05p)$$

b) Le signe de $R'(p)$ est celui de $1 - 0,05p$, positif pour $p < 20$.

- R croît sur $[0 ; 20]$, décroît sur $[20 ; 100]$: le prix optimal est 20 €.
- **Recette maximale** : $R(20) = 20\,000 e^{-1} \approx 7\,358$ €, pour environ 368 articles vendus.
- **Interprétation** : augmenter le prix fait perdre des clients ; au-delà de 20 €, la perte de clients l'emporte sur le gain par article.

Réponse. Prix optimal 20 € ; recette maximale $\frac{20\,000}{e} \approx 7\,358$ €.