

Plaquette 3 - Équations, inéquations et substitutions

Fonction exponentielle — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équivalences (pour tous réels a, b) :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Avec un nombre : $e^x = k$ a pour unique solution $x = \ln k$ si $k > 0$, et **aucune** solution si $k \leq 0$.

Produit nul : e^u ne s'annule jamais, donc $A(x)e^{u(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$.

Changement de variable : $a e^{2x} + b e^x + c = 0$. On pose $X = e^x$, on résout $aX^2 + bX + c = 0$, on **rejette** les racines $X \leq 0$, puis $x = \ln X$.

Astuce : $e^x + e^{-x} = k$ se ramène à $X^2 - kX + 1 = 0$ en multipliant par $e^x > 0$.

Signe d'un trinôme $aX^2 + bX + c$ ($a > 0$, deux racines) : négatif **entre** les racines, positif **à l'extérieur**.

Puissances : $a^x = e^{x \ln a}$ pour $a > 0$.

Correction de l'exercice 1 - Égaliser les exposants

La fonction exponentielle est strictement croissante, donc **injective** :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

a) $3x - 1 = x + 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

b) $x^2 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$.

— Racine évidente $x = 1$; le produit des racines vaut 3, donc l'autre racine est $x = 3$.

— $S = \{1; 3\}$.

— **Contrôle de a)** : $e^8 = e^8$ ✓

— **Remarque** : aucune condition d'existence ici, l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ — contrairement au logarithme.

Réponse. a) $x = 3$ · b) $S = \{1; 3\}$.

Correction de l'exercice 2 - Écrire le second membre en exponentielle

On écrit le second membre sous la forme e^b , ou on utilise le logarithme :

$$e^a = k \Leftrightarrow a = \ln k \quad (k > 0)$$

a) $e = e^1$, donc $2x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{e^2} = e^{-2}$, donc $-x = -2$ et $x = 2$.

c) Une exponentielle est **toujours strictement positive** : aucune solution, $S = \emptyset$.

d) $x + 1 = \ln 4$, donc $x = \ln 4 - 1 = 2 \ln 2 - 1 \approx 0,386$.

— **Piège en c)** : écrire $x = \ln(-2)$ n'a aucun sens.

Réponse. a) $\frac{1}{2}$ · b) 2 · c) aucune solution · d) $\ln 4 - 1$.

Correction de l'exercice 3 - Premières inéquations

La stricte croissance de l'exponentielle **conserve le sens** des inégalités :

$$e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$$

a) $1 = e^0$, donc $2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$. $S =]-\infty; \frac{3}{2}]$.

b) $x^2 > x \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > 1$. $S =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

c) $-x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$ (multiplication par -1 , le sens change). $S =]-\infty; -2]$.

— **Piège en c)** : le changement de sens vient de la multiplication par -1 , pas de l'exponentielle.

Réponse. a) $] -\infty; \frac{3}{2}]$ · b) $] -\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ · c) $] -\infty; -2]$.

Correction de l'exercice 4 - Équations produit

On utilise la règle du **produit nul** et le fait qu'une exponentielle ne s'annule jamais :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0 \quad e^u \neq 0$$

a) $x - 2 = 0$ ou $e^x = 1 = e^0$: $x = 2$ ou $x = 0$. $S = \{0; 2\}$.

b) On factorise par e^x : $e^x(e^x - 1) = 0$. Le premier facteur n'est jamais nul ; le second s'annule pour $x = 0$. $S = \{0\}$.

c) $e^{-x} \neq 0$, donc $x^2 - 9 = 0$, soit $x = 3$ ou $x = -3$. $S = \{-3; 3\}$.

— **Piège en b)** : diviser par e^x est permis (il n'est jamais nul), mais il faut le dire.

Réponse. a) $\{0; 2\}$ · b) $\{0\}$ · c) $\{-3; 3\}$.

Correction de l'exercice 5 - Inéquation par tableau de signes

On étudie le signe de chaque facteur.

— $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

— $e^x - e \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^1 \Leftrightarrow x \geq 1$.

$$e^x \geq e^1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x + 1$		-	0	+		+	
$e^x - e$		-		-	0	+	
produit		+	0	-	0	+	

$$S =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

— **Contrôle** en $x = 0$: $1 \times (1 - e) < 0$, exclu ✓

Réponse. $S =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

Correction de l'exercice 6 - Une racine à rejeter

On pose $X = e^x$, avec la condition $X > 0$. Comme $e^{2x} = X^2$:

$$X^2 + X - 2 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X + 2) = 0$$

— $X = 1$ ou $X = -2$.

— **Condition** $X > 0$: on **rejette** $X = -2$, car $e^x = -2$ est impossible.

— $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

$$S = \{0\}$$

- **Contrôle** : $e^0 + e^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 \checkmark$
- **Leçon** : l'équation en X a deux solutions, l'équation en x une seule. La condition $X > 0$ n'est pas une formalité.

Réponse. $S = \{0\}$ ($X = -2$ est rejeté).

Correction de l'exercice 7 - Une inéquation par substitution

On pose $X = e^x > 0$:

$$X^2 - 3X + 2 < 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X - 2) < 0$$

- Un trinôme de coefficient dominant positif est négatif **entre** ses racines : $1 < X < 2$.
- **Retour à x** , par stricte croissance du logarithme :
 $1 < e^x < 2 \Leftrightarrow \ln 1 < x < \ln 2 \Leftrightarrow 0 < x < \ln 2$.

$$S =]0; \ln 2[$$

- **Contrôle** en $x = 0,5$ ($\ln 2 \approx 0,693$) : $e - 3\sqrt{e} + 2 \approx 2,718 - 4,946 + 2 = -0,228 < 0 \checkmark$

Réponse. $S =]0; \ln 2[$.

Correction de l'exercice 8 - Exponentielle et son inverse

On multiplie par $e^x > 0$, avec $e^{-x} \times e^x = 1$, puis on pose $X = e^x$:

$$e^x + e^{-x} = k \Leftrightarrow X^2 - kX + 1 = 0$$

a) $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow x = 0$. $S = \{0\}$.

b) $X^2 - 3X + 1 = 0$: $\Delta = 9 - 4 = 5$, d'où $X = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

- Les deux racines sont **positives** ($\sqrt{5} < 3$) : elles conviennent.
- $x = \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,962$ ou $x = \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,962$.
- **Symétrie** : les deux solutions sont **opposées**, car le produit des racines vaut 1 ; c'est normal, la fonction $e^x + e^{-x}$ est paire.
- Pour $k < 2$, il n'y aurait **aucune** solution : 2 est le minimum de cette fonction.

Réponse. a) $\{0\}$ · b) $\left\{ \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{2} ; \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Correction de l'exercice 9 - Puissances de 2

On utilise $a^x = e^{x \ln a}$, donc

$$\ln(a^x) = x \ln a$$

a) $2^x = 5 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 5 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,322$.

b) $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. On pose $X = 2^x > 0$:

- $X^2 - 3X - 4 = 0 \Leftrightarrow (X - 4)(X + 1) = 0$;
- $X = -1$ est **rejeté** ; $X = 4 \Leftrightarrow 2^x = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$.

$$S = \{2\}$$

- **Contrôle de b)** : $16 - 12 - 4 = 0 \checkmark$

Réponse. a) $\frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,32$ · b) $S = \{2\}$.

Correction de l'exercice 10 - Un seuil de décroissance

a) On résout $m(t) < 1$:

$$5e^{-0,2t} < 1 \Leftrightarrow e^{-0,2t} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow -0,2t < \ln \frac{1}{5} = -\ln 5$$

- En divisant par $-0,2 < 0$, **le sens change** : $t > 5 \ln 5 \approx 8,05$.
- La masse passe sous 1 g au bout d'environ 8,05 **jours**.

b) La demi-vie T vérifie $m(T) = \frac{m(0)}{2}$:

- $e^{-0,2T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,2T = -\ln 2 \Leftrightarrow T = 5 \ln 2 \approx 3,47$ jours.
- **Contrôle** : 8,05 jours, c'est un peu plus de deux demi-vies (6,93 jours, qui laissent 1,25 g) ✓

Réponse. a) $t > 5 \ln 5 \approx 8,05$ jours · b) $T = 5 \ln 2 \approx 3,47$ jours.

Correction de l'exercice 11 - Intersection de deux courbes

a) On résout $f(x) = g(x)$, en multipliant par $e^x > 0$:

$$e^x = 2 + e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$$

- Avec $X = e^x$: $X^2 - 2X - 1 = 0$, $\Delta = 4 + 4 = 8$, d'où $X = 1 \pm \sqrt{2}$.
- $1 - \sqrt{2} < 0$ est **rejeté** ; $X = 1 + \sqrt{2}$ donne $x = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,881$.

b) Le signe de $f(x) - g(x)$ est celui de $X^2 - 2X - 1$ (on a multiplié par $e^x > 0$), positif pour $X > 1 + \sqrt{2}$ (seule racine positive).

- Pour $x > \ln(1 + \sqrt{2})$: la courbe de f est **au-dessus** ;
- pour $x < \ln(1 + \sqrt{2})$: elle est **en dessous**.

Réponse. Intersection en $x = \ln(1 + \sqrt{2})$; $f > g$ à droite de ce point.

Correction de l'exercice 12 - Deux solutions selon un paramètre

Avec $X = e^x$, l'équation devient $X^2 - 2X + m = 0$. Chaque racine $X > 0$ donne une solution $x = \ln X$, et deux racines distinctes donnent deux x distincts. Il faut donc **deux racines distinctes strictement positives**.

- **Deux racines distinctes** : $\Delta = 4 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.
- **Toutes deux positives** : leur somme vaut $2 > 0$ et leur produit vaut m ; il faut

$$X_1 X_2 = m > 0$$

(avec une somme positive et un produit positif, les deux racines sont positives).

Conclusion : $0 < m < 1$.

- **Contrôle** avec $m = 0,75$: $X^2 - 2X + 0,75 = 0$ donne $X = 0,5$ ou $X = 1,5$, soit $x = \ln 0,5$ ou $x = \ln 1,5$ ✓
- Si $m \leq 0$: une racine est négative ou nulle, il ne reste qu'**une** solution.

Réponse. $0 < m < 1$.

Correction de l'exercice 13 - Deux populations

On résout $A(t) > B(t)$. On regroupe les exponentielles en divisant par $100e^{0,01t} > 0$:

$$100e^{0,05t} > 400e^{0,01t} \Leftrightarrow e^{0,04t} > 4$$

- Par stricte croissance du logarithme : $0,04t > \ln 4 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 4}{0,04} = 25 \ln 4$.
- $25 \ln 4 \approx 34,66$: A dépasse B au cours de la 35^e année.
- **Contrôle** : $A(35) \approx 575$ et $B(35) \approx 568$ ✓
- **Interprétation** : même en partant quatre fois plus bas, un taux de croissance plus élevé finit toujours par l'emporter.

Réponse. $t > 25 \ln 4 \approx 34,7$ ans.

Correction de l'exercice 14 - Une solution évidente et unique

a) L'inégalité admise montre que $e^x - (x + 1) \geq 0$, avec égalité **seulement** en 0.
L'équation a donc une unique solution :

$$S = \{0\}$$

(Aucune manipulation algébrique ne permet de résoudre cette équation : c'est l'étude de fonction qui conclut.)

b) On applique l'inégalité à $X = x - 1$: $e^{x-1} \geq (x - 1) + 1 = x$, avec égalité seulement si $x - 1 = 0$.

- Donc $e^{x-1} \geq x$ **toujours**, et $e^{x-1} \leq x$ n'est vrai que dans le cas d'égalité : $x = 1$.
- $S = \{1\}$.
- **Interprétation** : la droite $y = x$ est tangente à la courbe de $x \mapsto e^{x-1}$ en $(1; 1)$; la courbe est au-dessus.

Réponse. a) $S = \{0\}$ · b) $S = \{1\}$.

Correction de l'exercice 15 - Charge d'un condensateur

a) On résout $u(t) \geq 0,99 \times 12$:

$$1 - e^{-t/2} \geq 0,99 \Leftrightarrow e^{-t/2} \leq 0,01 \Leftrightarrow -\frac{t}{2} \leq \ln 0,01$$

- En multipliant par $-2 < 0$, **le sens change** : $t \geq -2 \ln 0,01 = 2 \ln 100 \approx 9,21$ ms.

b) Pour $t = 5\tau = 10$ ms : $\frac{u(10)}{12} = 1 - e^{-5} \approx 1 - 0,0067 = 0,9933$.

- La tension atteint environ 99,3 % de sa valeur finale.
- **Cohérence** : 10 ms dépasse légèrement les 9,21 ms trouvées en a) ✓
- **Remarque** : la charge n'est jamais **complète** ($e^{-t/2} > 0$) ; la règle des 5τ est un seuil pratique.

Réponse. a) $t \geq 2 \ln 100 \approx 9,21$ ms · b) $1 - e^{-5} \approx 99,3$ %.