

Plaquette 4 - Limites, asymptotes et modèles

Fonction exponentielle — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites aux bornes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

L'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à la courbe de exp en $-\infty$.

Croissances comparées (pour tout entier $n \geq 1$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

Limite remarquable (nombre dérivé de exp en 0) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Composées : $e^{u(x)} \rightarrow +\infty$ si $u(x) \rightarrow +\infty$, $\rightarrow 0$ si $u(x) \rightarrow -\infty$, $\rightarrow e^\ell$ si $u(x) \rightarrow \ell$.

Asymptote oblique : $y = ax + b$ est asymptote en $+\infty$ si $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$; la position se lit sur le **signe** de cette différence.

Modèles : $y(t) = K + C e^{-kt}$ ($k > 0$) tend vers la valeur d'équilibre K .

Correction de l'exercice 1 - Les limites de référence

On utilise les limites de référence et les croissances comparées.

a) Par composition avec $X = -x$: en $+\infty$, $X \rightarrow -\infty$ et $e^X \rightarrow 0$; en $-\infty$, $X \rightarrow +\infty$ et $e^X \rightarrow +\infty$.

b) Forme $\infty \times 0$; par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

c) Forme $\frac{\infty}{\infty}$; par croissances comparées, la limite vaut $+\infty$.

d) $e^x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow -\infty$: la somme tend vers $-\infty$ (pas d'indétermination).

— **Image** : en $+\infty$, l'exponentielle gagne contre x ; en $-\infty$, elle devient négligeable devant x .

Réponse. a) 0 et $+\infty$ · b) 0 · c) $+\infty$ · d) $-\infty$.

Correction de l'exercice 2 - Polynôme fois exponentielle

a) En $+\infty$: $x^2 - 3x \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow 0$, forme $\infty \times 0$. On développe :

$$f(x) = x^2 e^{-x} - 3x e^{-x}$$

Par **croissances comparées**, $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$ et $x e^{-x} \rightarrow 0$: $f(x) \rightarrow 0$.

b) En $-\infty$: $x^2 - 3x \rightarrow +\infty$ (terme dominant x^2) et $e^{-x} \rightarrow +\infty$. Le produit tend vers $+\infty$: **pas** d'indétermination.

— **Piège** : ne pas appliquer mécaniquement les croissances comparées. En $-\infty$, e^{-x} ne tend **pas** vers 0.

— **Asymptote** : l'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$.

Réponse. a) 0 · b) $+\infty$.

Correction de l'exercice 3 - Un quotient d'exponentielles

En $+\infty$: forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par e^x en haut et en bas :

$$f(x) = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$ (pas d'indétermination).

— **Asymptotes** : $y = 1$ en $+\infty$ et $y = -1$ en $-\infty$.

— **Remarque** : f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), en multipliant en haut et en bas par e^x , ce qui explique les limites opposées.

Réponse. 1 en $+\infty$, -1 en $-\infty$: asymptotes $y = 1$ et $y = -1$.

Correction de l'exercice 4 - Le terme dominant change de camp

a) En $+\infty$: forme $\infty - \infty$. Le terme dominant est e^{2x} ; on factorise :

$$f(x) = e^{2x}(1 - 3e^{-x} + xe^{-2x})$$

— $3e^{-x} \rightarrow 0$;

— $xe^{-2x} = \frac{x}{e^{2x}} \rightarrow 0$ par croissances comparées.

— La parenthèse tend vers 1, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

b) En $-\infty$: $e^{2x} \rightarrow 0$, $e^x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow -\infty$. Donc $f(x) \rightarrow -\infty$; c'est ici le terme x qui domine.

— **Leçon** : le terme dominant n'est pas le même aux deux bornes.

Réponse. a) $+\infty$ · b) $-\infty$.

Correction de l'exercice 5 - Composées aux points sensibles

On pose $X = u(x)$, puis on utilise

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

a) En 1^+ , $x - 1 \rightarrow 0^+$ et $X = \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$: la limite vaut $+\infty$. En 1^- , $X \rightarrow -\infty$: la limite vaut 0.

b) $x^2 \rightarrow 0^+$, donc $-\frac{1}{x^2} \rightarrow -\infty$ et la limite vaut 0.

c) $\frac{2x}{x+1} \rightarrow 2$ (même degré), donc la limite vaut e^2 .

— **Remarque sur b)** : la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ s'aplatit extraordinairement près de 0 ; en posant $f(0) = 0$, on la prolonge par continuité.

Réponse. a) $+\infty$ à droite, 0 à gauche · b) 0 · c) e^2 .

Correction de l'exercice 6 - Reconnaître un nombre dérivé

Formes indéterminées ; on reconnaît un **taux d'accroissement** :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

a) Avec $f = \exp$, $a = 0$, $f(0) = 1$: la limite vaut $\exp'(0) = 1$.

b) Avec $f(x) = e^{2x}$, $f(0) = 1$ et $f'(x) = 2e^{2x}$: la limite vaut $f'(0) = 2$.

c) Forme $\infty \times 0$. On pose $h = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$:

— $x(e^{1/x} - 1) = \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 1$ d'après a).

— **Interprétation de a)** : près de 0, $e^x \approx 1 + x$; c'est l'approximation affine de l'exponentielle.

Réponse. a) 1 · b) 2 · c) 1.

Correction de l'exercice 7 - Une asymptote oblique

a) **En $+\infty$** : $x + 2 \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

En $-\infty$: $x + 2 \rightarrow -\infty$ et $-e^{-x} \rightarrow -\infty$; la somme tend vers $-\infty$.

b) On calcule l'écart à la droite :

$$f(x) - (x + 2) = -e^{-x} \rightarrow 0 \text{ en } +\infty$$

— Δ est **asymptote oblique** en $+\infty$.

— $-e^{-x} < 0$ pour tout x : la courbe est **toujours en dessous** de Δ .

— **Pas d'asymptote en $-\infty$** : l'écart $-e^{-x}$ tend vers $-\infty$, la courbe s'éloigne de Δ .

Réponse. $+\infty$ et $-\infty$; $\Delta: y = x + 2$ asymptote en $+\infty$, courbe en dessous.

Correction de l'exercice 8 - Étude complète de x e puissance moins x

a) **En $-\infty$** : $x \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$: le produit tend vers $-\infty$.

En $+\infty$: forme $\infty \times 0$, levée par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

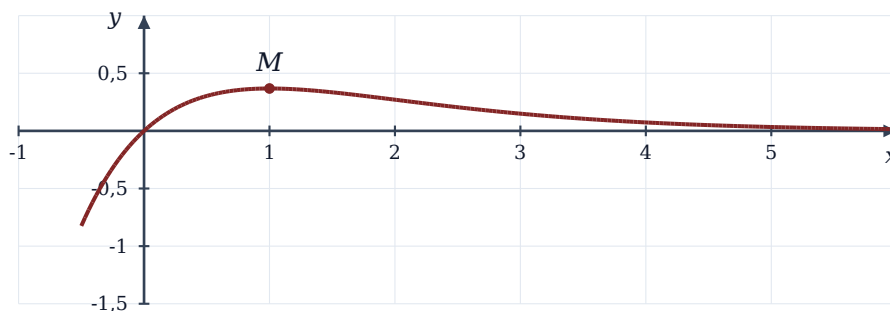
b) $f(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x) e^{-x}$, du signe de $1 - x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$	croissante	$\frac{1}{e}$	décroissante	0

— **Maximum** : $f(1) = e^{-1} \approx 0,368$.

— L'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$; la courbe passe par l'origine.

Réponse. $-\infty$ en $-\infty$, 0 en $+\infty$; maximum $\frac{1}{e}$ en 1.



Courbe de f : maximum $1/e$ en $x = 1$, asymptote $y = 0$ en $+\infty$

Correction de l'exercice 9 - Une population qui sature

a) $P(0) = \frac{1\,000}{1+9} = 100$ poissons.

En $+\infty$, $e^{-0,5t} \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{1\,000}{1+0} = 1\,000$$

Interprétation : la population se stabilise vers 1 000 poissons, la **capacité d'accueil** du lac (nourriture, espace).

b) On résout $P(t) = 900$:

$$- 1 + 9e^{-0,5t} = \frac{1\,000}{900} = \frac{10}{9}, \text{ soit } 9e^{-0,5t} = \frac{1}{9} \text{ et } e^{-0,5t} = \frac{1}{81};$$

$$- -0,5t = -\ln 81, \text{ d'où } t = 2 \ln 81 \approx 8,79 \text{ ans.}$$

— **Lecture graphique** : la courbe en S croise bien le niveau 900 vers $t \approx 9$ ✓

Réponse. a) 100 ; limite 1 000 (capacité du lac) · b) $t = 2 \ln 81 \approx 8,8$ ans.

Correction de l'exercice 10 - Chute avec frottements

a) $e^{-0,2t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 50 \text{ m/s}$$

soit 180 km/h : les frottements de l'air compensent alors le poids.

$$b) v(t) = 0,95 \times 50 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,2t} = 0,95 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,05.$$

$$- -0,2t = \ln 0,05 = -\ln 20, \text{ donc } t = 5 \ln 20 \approx 14,98 \text{ s, soit environ } 15 \text{ s.}$$

$$c) v'(t) = 50 \times 0,2 e^{-0,2t} = 10 e^{-0,2t}, \text{ donc } v'(0) = 10 \text{ m/s}^2.$$

— **Interprétation** : au départ, l'accélération vaut environ $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, celle d'une chute libre ; elle diminue ensuite jusqu'à 0.

Réponse. a) 50 m/s · b) $5 \ln 20 \approx 15 \text{ s}$ · c) 10 m/s^2 , l'accélération de la pesanteur.

Correction de l'exercice 11 - Compter les solutions grâce aux limites

a) **En** $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$ et $-x - 2 \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

En $+\infty$: forme $\infty - \infty$; on factorise par e^x :

$$f(x) = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x} \right) \rightarrow +\infty$$

car $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ (croissances comparées).

b) $f(x) = e^x - 1$: f décroît sur $]-\infty; 0]$, croît sur $[0; +\infty[$, **minimum** $f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$.

— Sur $]-\infty; 0]$: f continue, strictement décroissante, de $+\infty$ à -1 : **une** solution (corollaire du TVI).

— Sur $[0; +\infty[$: strictement croissante de -1 à $+\infty$: **une** solution.

L'équation a **exactement deux** solutions ($\approx -1,84$ et $\approx 1,15$).

Réponse. $+\infty$ aux deux bornes, minimum -1 : deux solutions.

Correction de l'exercice 12 - Deux suites

On applique aux suites les croissances comparées connues pour les fonctions.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0, \text{ donc } u_n \rightarrow 0.$$

b) On factorise par e^n :

$$v_n = \frac{1 + n e^{-n}}{1 - n e^{-n}} \rightarrow \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$c) \text{ On écrit } 2^n = e^{n \ln 2} \text{ et on pose } X = n \ln 2 \rightarrow +\infty; \text{ alors } n = \frac{X}{\ln 2} \text{ et}$$

$$w_n = \frac{e^x}{X^3} \times (\ln 2)^3 \rightarrow +\infty$$

— **À retenir** : toute suite géométrique de raison $q > 1$ finit par dépasser n'importe quelle puissance de n .

Réponse. a) 0 · b) 1 · c) $+\infty$.

Correction de l'exercice 13 - Exponentielle contre puissance dixième

a) Par croissances comparées, avec $n = 10$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = +\infty$$

b) Pour $x = 10$: $e^{10} \approx 22\,026$ et $10^{10} = 10\,000\,000\,000$: c'est **la puissance** qui est de loin la plus grande.

Pour $x = 40$: $e^{40} \approx 2,35 \times 10^{17}$ et $40^{10} \approx 1,05 \times 10^{16}$: l'exponentielle a pris le dessus.

c) La limite affirme que l'exponentielle **fin**it par l'emporter, mais elle ne dit **pas à partir de quand**. Ici, la bascule a lieu vers $x \approx 35,8$ (solution de $x = 10 \ln x$).

— **Moralité** : une limite décrit le comportement « à l'infini » ; pour des valeurs concrètes, il faut calculer.

Réponse. a) $+\infty$ · b) x^{10} gagne en 10, e^x en 40 · c) la bascule a lieu vers 35,8.

Correction de l'exercice 14 - Deux asymptotes horizontales

a) On réduit au même dénominateur :

$$2 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{2(e^x + 1) - 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} = f(x)$$

b) **En** $+\infty$: $e^x + 1 \rightarrow +\infty$, donc $\frac{1}{e^x + 1} \rightarrow 0$ et $f(x) \rightarrow 2$.

— $f(x) - 2 = -\frac{1}{e^x + 1} < 0$: la courbe est **sous** l'asymptote $y = 2$.

En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{0+1}{0+1} = 1$.

— $f(x) - 1 = \frac{2e^x + 1 - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$: la courbe est **au-dessus** de l'asymptote $y = 1$.

— La courbe est donc coincée dans la bande $1 < y < 2$.

Réponse. $y = 2$ en $+\infty$ (courbe dessous), $y = 1$ en $-\infty$ (courbe dessus).

Correction de l'exercice 15 - Montée en température d'un four

a) $T(0) = 250 - 230 = 20$ °C (température de la pièce).

En $+\infty$, $e^{-0,1t} \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 250 \text{ °C}$$

(la température de consigne).

b) $T(t) = -230 \times (-0,1)e^{-0,1t} = 23e^{-0,1t}$, qui tend vers 0 : le four chauffe **de plus en plus lentement** à l'approche de la consigne.

c) $T(t) = 240 \Leftrightarrow 230e^{-0,1t} = 10 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{23}$.

— $-0,1t = -\ln 23$, donc $t = 10 \ln 23 \approx 31,4$ minutes.

— **Interprétation** : les derniers degrés sont les plus longs à gagner ; atteindre exactement 250 °C prendrait, dans ce modèle, un temps infini.

Réponse. a) 20 °C, limite 250 °C · b) $T \rightarrow 0$ · c) $10 \ln 23 \approx 31$ min.