Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modèles de croissance, seuils et études

Fonction exponentielle — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés algébriques.

$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad (e^a)^n = e^{na}$$

— $e^x > 0$ **pour tout** x — jamais nul, jamais négatif.

— **Bijection strictement croissante** de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$:

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \qquad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

— **Lien avec** ln : $e^{\ln x} = x$ $(x > 0)$ et $\ln(e^x) = x$.

Dérivées.

$$(e^x)' = e^x \qquad (e^u)' = u' e^u$$

Limites.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Inégalité de référence : $e^x \geq x + 1$ pour tout réel, avec **égalité seulement en** 0 (exp est **convexe**, sa courbe est au-dessus de ses tangentes).

Équations du type $ae^{2x} + be^x + c = 0$: poser $X = e^x$, résoudre le trinôme, puis **ne garder que les racines strictement positives**.

Modèles : $f(t) = f_0 e^{kt}$ — croissance si $k > 0$, décroissance si $k < 0$; **demi-vie** $T = \dfrac{\ln 2}{|k|}$.

Correction de l'exercice 1 – Simplification d'expressions

a) On additionne les exposants au numérateur, puis on soustrait :

$$A = \frac{e^3}{e^4} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$$

b) $\left(e^{2x}\right)^3 = e^{6x}$, donc $B = e^{6x-5x} = e^x$.

c) On **factorise** par e^x au numérateur :

$$C = \frac{e^x(1 + e^x)}{e^x} = 1 + e^x$$

— **Contrôles en** $x = 0$: $B = 1 = e^0$ ✓ ; $C = \dfrac{1+1}{1} = 2$, et $1 + e^0 = 2$ ✓

— **Réflexe pour c)** : factoriser par la **plus petite** puissance de e^x — jamais « simplifier » terme à terme, ce qui donnerait la réponse fausse $1 + e^x$… qui est ici correcte par chance, mais le raisonnement doit passer par la factorisation.

Réponse. a) e^{-1} · b) e^x · c) $1 + e^x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Équation exponentielle simple

Première équation. exp étant **injective**, on identifie les exposants :

$$2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$$

— **Vérification** : $e^7 = e^7$ ✓

Seconde équation. De même, $x^2 = 3x - 2$, soit $x^2 - 3x + 2 = 0$.

— **Racines** : $x = 1$ et $x = 2$ (somme 3, produit 2).
— **Les deux conviennent** : aucune contrainte de domaine, l'exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$.
— **Vérification** pour $x = 2$: $e^4 = e^{6-2} = e^4$ ✓
— **Différence essentielle avec** ln : il n'y a **aucun domaine** à déterminer pour une équation en e^u — c'est la contrepartie du fait que e^x ne s'annule jamais.

Réponse. $x = 4$; puis $x \in \{1\,;2\}$.

Correction de l'exercice 3 – Changement de variable

— **Changement de variable** : on pose $X = e^x$, avec la contrainte $X > 0$.
— Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation devient

$$X^2 - 4X + 3 = 0$$

— **Racines** : $X = 1$ et $X = 3$ (somme 4, produit 3) — **toutes deux positives**, donc admissibles.
— **Retour à** x :
— $e^x = 1$ donne $x = 0$;
— $e^x = 3$ donne $x = \ln 3 \approx 1{,}0986$.
— **Vérification** pour $x = \ln 3$: $e^{2\ln 3} = 9$, et $9 - 12 + 3 = 0$ ✓
— **Piège capital** : si une racine en X était **négative ou nulle**, il faudrait la **rejeter** — par exemple $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ donne $X = 3$ ou $X = -1$, et seule $X = 3$ convient.

Réponse. $S = \{0\,;\ln 3\}$.

Correction de l'exercice 4 – Inéquation exponentielle

— **Réécriture** : $1 = e^0$, donc l'inéquation devient $e^{x^2-3x} \leq e^0$.
— exp étant **strictement croissante**, le sens est **conservé** :

$$x^2 - 3x \leq 0 \iff x(x-3) \leq 0$$

— **Tableau de signe** : le produit est négatif **entre** les racines 0 et 3.
— **Solution** : $S = [0\,;3]$.
— **Vérifications** : $x = 1$ donne $e^{-2} = 0{,}135 \leq 1$ ✓ ; $x = 4$ donne $e^4 = 54{,}6 > 1$ — bien exclu ✓
— **Bornes** : $x = 0$ et $x = 3$ donnent $e^0 = 1$ — égalité, donc les bornes sont **incluses** ✓
— **Méthode** : ramener les deux membres sous forme $e^{\text{quelque chose}}$, puis comparer les **exposants**.

Réponse. $S = [0\,;3]$.

Correction de l'exercice 5 – Dérivées avec exponentielle

a) Forme $u'e^u$ avec $u = 3x + 1$: $f'(x) = 3e^{3x+1}$.
b) **Produit** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$g'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

c) **Quotient** :

$$h'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

— **Contrôles de signe** : g' a le signe de $x(2-x)$ — g décroît, croît sur $[0\,;2]$, puis décroît ; maximum en $x=2$, $g(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}541$ ✓

— $h' > 0$ **partout** : h est strictement croissante, de 0 (en $-\infty$) à 1 (en $+\infty$) — c'est la **fonction logistique**, utilisée en modélisation de saturation.

— **Contrôle** : $h(0) = \frac{1}{2}$ et $h'(0) = \frac{1}{4}$ ✓

Réponse. a) $3e^{3x+1}$ · b) $x(2-x)e^{-x}$ · c) $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

Correction de l'exercice 6 – Étude de x e^x

— **Dérivée** : $f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$.

— **Signe** : $e^x > 0$, donc f' a le signe de $x-1$.

— **Variations** : f **décroît** sur $]-\infty\,;1]$, **croît** sur $[1\,;+\infty[$.

— **Minimum** en $x=1$: $f(1) = -e \approx -2{,}718$.

— **Limites** :

— en $-\infty$: par croissances comparées, $xe^x \to 0$ et $-2e^x \to 0$, donc $f \to 0^-$;

— en $+\infty$: $f \to +\infty$.

— **Asymptote** : $y=0$ en $-\infty$ (la courbe s'en approche **par en dessous**).

— **Zéro** : $f(x)=0$ pour $x=2$.

— **Contrôles** : $f(0) = -2$ ✓ ; $f(-3) = -5e^{-3} \approx -0{,}249$ ✓ ; $f(3) = e^3 \approx 20{,}09$ ✓

Réponse. Minimum $-e$ en $x=1$; asymptote $y=0$ en $-\infty$.

Correction de l'exercice 7 – Croissances comparées

Première limite. On **factorise par** e^x au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{1 + \frac{x}{e^x}}$$

— Or $\frac{x}{e^x} \to 0$ (l'exponentielle domine), donc la limite est $\frac{1-0}{1+0} = 1$.

Seconde limite. En $-\infty$, on a une forme $(-\infty) \times 0$.

— Par croissances comparées, $x^n e^x \to 0$ pour tout n, donc $x^3 e^x \to 0$.

— **Signe** : $x^3 < 0$ et $e^x > 0$, donc la limite est atteinte **par valeurs négatives**, 0^-.

— **Contrôles** : $\frac{e^{10}-10}{e^{10}+10} \approx 0{,}99909$ ✓ ; $(-10)^3 e^{-10} = -1000 \times 4{,}54 \times 10^{-5} \approx -0{,}0454$ ✓ ; $(-20)^3 e^{-20} \approx -1{,}65 \times 10^{-5}$ ✓

Réponse. 1 et 0^-.

Correction de l'exercice 8 – Inégalité e^x ≥ x+1

— **Fonction auxiliaire** : $g(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

— **Dérivée** : $g'(x) = e^x - 1$, **négative** pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$.

— g atteint donc son **minimum** en $x=0$, où $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Conclusion** : $g(x) \geq 0$ pour tout réel, soit

$$\mathrm{e}^x \geq x + 1$$

— **Cas d'égalité** : le minimum étant **strict** de part et d'autre de 0, l'égalité n'a lieu **qu'en** $x = 0$.

— **Lien avec la convexité** : $g'' = \mathrm{e}^x > 0$, donc exp est **convexe** — sa courbe est au-dessus de **toutes** ses tangentes, et $y = x + 1$ est la tangente en 0.

— **Contrôles** : $\mathrm{e}^{-2} = 0{,}135 \geq -1$ ✓ ; $\mathrm{e}^{0{,}1} = 1{,}1052 \geq 1{,}1$ ✓ — l'écart est minuscule près de 0, ce qui illustre la tangence.

— **Usage** : c'est l'inégalité la plus employée du chapitre (majorations, convergences, comparaisons de suites).

Réponse. $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ a un minimum nul en 0 ; égalité seulement en 0.

Correction de l'exercice 9 – Décroissance radioactive

a) **Demi-vie** : on résout $\mathrm{e}^{-0{,}05T} = \dfrac{1}{2}$.

$$-0{,}05\,T = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \quad\Longrightarrow\quad T = \frac{\ln 2}{0{,}05} \approx 13{,}86 \text{ jours}$$

b) On résout $\mathrm{e}^{-0{,}05t} = 0{,}10$:

$$t = \frac{-\ln 0{,}10}{0{,}05} = \frac{2{,}302585}{0{,}05} \approx 46{,}05 \text{ jours}$$

— **Contrôles** : $\mathrm{e}^{-0{,}05 \times 13{,}86} = 0{,}5000$ ✓ ; $\mathrm{e}^{-0{,}05 \times 46{,}05} = 0{,}1000$ ✓

— **Cohérence entre les deux résultats** : 10 % correspond à un peu plus de 3 demi-vies ($\frac{1}{2^3} = 12{,}5$ %), et $3 \times 13{,}86 \approx 41{,}6$ jours — la valeur 46 jours est bien **au-delà** ✓

— **Formule générale** : le temps pour atteindre une fraction p vaut $t = \dfrac{-\ln p}{k}$.

Réponse. a) $T = \dfrac{\ln 2}{0{,}05} \approx 13{,}86$ j · b) $\approx 46{,}05$ j.

Correction de l'exercice 10 – Modèle de refroidissement

— **Équation** : $20 + 65\mathrm{e}^{-0{,}04t} = 50$, soit $65\mathrm{e}^{-0{,}04t} = 30$.

— **Isolement de l'exponentielle** : $\mathrm{e}^{-0{,}04t} = \dfrac{30}{65} = \dfrac{6}{13} \approx 0{,}46154$.

— **Logarithme** :

$$t = \frac{-\ln(6/13)}{0{,}04} = \frac{0{,}77319}{0{,}04} \approx 19{,}33 \text{ minutes}$$

— **Réponse** : environ **19 min 20 s**.

— **Contrôle** : $T(19{,}33) = 20 + 65 \times 0{,}46154 \approx 20 + 30 = 50$ °C ✓

— **Comportement asymptotique** : $T(t) \to 20$ °C — la température de la pièce est une **asymptote horizontale**, jamais atteinte.

— **Loi de Newton** : ce modèle est la solution de $T' = -k(T - T_{\text{ext}})$, où la vitesse de refroidissement est **proportionnelle à l'écart** de température.

Réponse. Au bout de $\approx 19{,}33$ min (soit 19 min 20 s).

Correction de l'exercice 11 – Croissance d'une population

— **Détermination de** k : le doublement en 3 h donne $\mathrm{e}^{3k} = 2$, donc

$$k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0{,}23105 \text{ h}^{-1}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Multiplication par 100** : on résout $e^{kt} = 100$,

$$t = \frac{\ln 100}{k} = \frac{4{,}60517}{0{,}23105} \approx 19{,}93 \text{ heures}$$

— **Contrôle par les doublements** : $100 \approx 2^{6{,}64}$, et $6{,}64 \times 3 \approx 19{,}93$ h ✓

— **Vérification directe** : $e^{0{,}23105 \times 19{,}93} = e^{4{,}605} = 100{,}0$ ✓

— **Repère utile** : $2^{10} = 1024 \approx 1000$, donc la population est multipliée par ≈ 1 000 en 30 h — croissance explosive typique de l'exponentielle.

— **Limite du modèle** : en pratique la croissance **sature** (ressources limitées) ; on passe alors à un modèle **logistique**.

Réponse. $k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0{,}231$; $t \approx 19{,}93$ h.

Correction de l'exercice 12 – Fonction logistique

— **Dérivée** : en écrivant $f = 10(1 + e^{-x})^{-1}$,

$$f'(x) = \frac{10\,e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0$$

— f est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

— **Limites** :

— en $-\infty$: $e^{-x} \to +\infty$, donc $f \to 0^+$;

— en $+\infty$: $e^{-x} \to 0$, donc $f \to 10$.

— **Asymptotes horizontales** : $y = 0$ et $y = 10$ — cette dernière est la **capacité de saturation**.

— **Point d'inflexion** : par symétrie de la courbe autour de son point milieu, il est en $x = 0$, où $f(0) = \frac{10}{2} = 5$ — soit la **moitié** de la capacité.

— **Vérification** : $f'(0) = \frac{10}{4} = 2{,}5$ est la **pente maximale** — la croissance est la plus rapide au point d'inflexion ✓

— **Contrôles** : $f(-2) = \frac{10}{1 + 7{,}389} \approx 1{,}192$ ✓ ; $f(2) = \frac{10}{1{,}1353} \approx 8{,}808$ ✓ — et $1{,}192 + 8{,}808 = 10$, confirmant la **symétrie** autour de $(0\,;5)$ ✓

Réponse. Croissante de 0 à 10 ; inflexion en $(0\,;5)$, pente maximale 2,5.

Correction de l'exercice 13 – Tangente et position

— **Valeurs** : $f(0) = 1$; $f'(x) = -e^{-x}$, donc $f'(0) = -1$.

— **Tangente** : $y = 1 - x$.

— **Position** : on étudie $g(x) = e^{-x} - 1 + x$.

— $g'(x) = -e^{-x} + 1$, **négative** pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$ — minimum en 0, où $g(0) = 0$.

— Donc $g \geq 0$: la courbe est **au-dessus** de sa tangente, avec égalité seulement en 0.

$$e^{-x} \geq 1 - x$$

— **Lien avec la convexité** : $f'' = e^{-x} > 0$, donc f est **convexe** — cohérent avec la position au-dessus des tangentes ✓

— **Contrôles** : $e^{-0{,}5} = 0{,}6065 \geq 0{,}5$ ✓ ; $e^{0{,}5} = 1{,}6487 \geq 1{,}5$ (avec $x = -0{,}5$) ✓

— **Remarque** : c'est l'inégalité $e^u \geq u + 1$ appliquée à $u = -x$.

Réponse. T:$y = 1 - x$; courbe au-dessus (exp est convexe).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Équation mixte exp et ln

— **Multiplication par** e^x (strictement positif, donc licite et sans changement de sens) :

$$e^{2x} - 1 = 2e^x$$

— **Changement de variable** $X = e^x > 0$: $X^2 - 2X - 1 = 0$.

— **Racines** : $\Delta = 4 + 4 = 8$, donc $X = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

— **Filtrage** : $1 - \sqrt{2} \approx -0{,}414 < 0$ est **rejetée** ; seule $X = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4142$ convient.

— **Solution** : $x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 0{,}8814$.

— **Vérification** : $e^{0{,}8814} - e^{-0{,}8814} = 2{,}4142 - 0{,}4142 = 2{,}0000$ ✓

— **Remarque** : cette solution s'écrit argsh(1) — la fonction réciproque du sinus hyperbolique, $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

— **Point de méthode** : multiplier par e^x est **toujours licite** ($e^x \neq 0$) et transforme l'équation en un trinôme.

Réponse. $x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 0{,}881$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète type bac

a) **Dérivée** :

$$f'(x) = 2xe^{-x} - \left(x^2 - 2\right)e^{-x} = \left(-x^2 + 2x + 2\right)e^{-x}$$

— **Signe** : $e^{-x} > 0$, donc f' a le signe de $-x^2 + 2x + 2$, trinôme de discriminant $4 + 8 = 12$.

— **Racines** : $x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = 1 \mp \sqrt{3}$, soit $1 - \sqrt{3} \approx -0{,}732$ et $1 + \sqrt{3} \approx 2{,}732$.

— Le coefficient de x^2 étant **négatif**, f' est positive **entre** les racines.

— **Variations** : f **décroît** sur $\left]-\infty\,;\,1 - \sqrt{3}\right]$, **croît** sur $\left[1 - \sqrt{3}\,;\,1 + \sqrt{3}\right]$, **décroît** ensuite.

— **Limites** : en $-\infty$, $x^2 \to +\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$, donc $f \to +\infty$; en $+\infty$, croissances comparées donnent $f \to 0^+$.

— **Asymptote** : $y = 0$ en $+\infty$.

b) **Tangentes horizontales** aux deux points critiques :

— en $x = 1 - \sqrt{3}$: $f \approx (0{,}536 - 2) \times 2{,}079 \approx -3{,}044$ (minimum local) ;

— en $x = 1 + \sqrt{3}$: $f \approx (7{,}464 - 2) \times 0{,}0652 \approx 0{,}356$ (maximum local).

c) **Signe de** f : $e^{-x} > 0$, donc f a le signe de $x^2 - 2$.

— $f(x) > 0$ pour $|x| > \sqrt{2}$, $f(x) < 0$ pour $|x| < \sqrt{2}$, et $f\left(\pm\sqrt{2}\right) = 0$.

— **Contrôles** : $f(0) = -2$ ✓ ; $f(2) = 2e^{-2} \approx 0{,}271$ ✓ ; $f(-2) = 2e^2 \approx 14{,}78$ ✓

Réponse. a) décroît, croît sur $\left[1 - \sqrt{3}\,;\,1 + \sqrt{3}\right]$, décroît · c) signe de $x^2 - 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).