

Plaquette 1 - Définition, propriétés et calculs

Fonction exponentielle — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

La fonction exponentielle est l'unique fonction égale à sa dérivée et valant 1 en 0. Elle transforme les **sommes en produits** : $e^{a+b} = e^a e^b$. Pour simplifier, on regroupe les exponentielles en **une seule**, en additionnant ou soustrayant les exposants ; pour un signe, on se souvient qu'une exponentielle est **toujours strictement positive**.

Exercice 1 - Calculer avec les exposants

Écrire sous la forme e^k :

a) $e^3 \times e^{-5}$

b) $(e^2)^3$

c) $\frac{e^5}{e^2}$

d) $\frac{(e^{-1})^2}{e^{-4}}$

Exercice 2 - Simplifier des expressions en x

Simplifier, pour tout réel x :

a) $A = e^{2x} \times e^{-x}$

b) $B = \frac{(e^x)^2}{e^{2x-1}}$

c) $C = \frac{e^{x+1}}{e^{x-1}}$

Exercice 3 - Identités remarquables

Développer :

a) $(e^x + e^{-x})^2$

b) $(e^x - 1)(e^x + 1)$

c) Factoriser $e^{2x} - 2e^x + 1$.

Exercice 4 - Deux écritures d'une même fonction

Démontrer que, pour tout réel x :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Exercice 5 - Étudier un signe

Étudier le signe de :

- a) $f(x) = (x - 2)e^x$
- b) $g(x) = 1 - e^x$
- c) $h(x) = (x + 3)(1 - e^x)$

Exercice 6 - Parité

Soit $f(x) = e^x + e^{-x}$ et $g(x) = e^x - e^{-x}$.

- a) Calculer $f(-x)$ et $g(-x)$. Que peut-on dire de f et g ?
- b) Interpréter graphiquement.

Exercice 7 - Démontrer les règles de calcul

On admet la relation $e^{a+b} = e^a e^b$ pour tous réels a, b .

- a) En prenant $b = -a$, démontrer que $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.
- b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $(e^a)^n = e^{na}$.

Exercice 8 - Une suite d'exponentielles

Soit $u_n = e^{-0,5n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a) Montrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.
- b) En déduire son sens de variation et sa limite.
- c) Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

Exercice 9 - Approcher le nombre e

- a) **Méthode d'Euler** : on approche la solution de $f' = f$, $f(0) = 1$, en avançant par pas de $h = 0,1$ avec $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x) = (1+h)f(x)$. Quelle valeur approchée de $e = f(1)$ obtient-on ?
- b) Calculer $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$. Comparer à $e \approx 2,71828$.

Exercice 10 - Une inégalité fondamentale

On admet que, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.

- a) En déduire que $e^{0,5} \geq 1,5$ et que $e^{-0,1} \geq 0,9$.
- b) En appliquant l'inégalité à $-x$, montrer que $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ pour $x < 1$.
- c) En déduire un encadrement de $e^{0,1}$.

Exercice 11 - Exponentielle et logarithme

Calculer :

- a) $e^{\ln 3 + 2 \ln 2}$
- b) $e^{-2 \ln 5}$
- c) $\ln(e^3 \sqrt{e})$

d) $e^{x + \ln x}$ pour $x > 0$

Exercice 12 - La famille des exponentielles e puissance kx

Soit k un réel et $f(x) = e^{kx}$.

- a) Montrer que $f' = kf$.
- b) Montrer que $f(a + b) = f(a)f(b)$ pour tous réels a, b .
- c) Pour quelle valeur de k a-t-on $f(1) = 2$?

Exercice 13 - Croissance d'une population de bactéries

Une population de bactéries compte $N(t) = 1\,000 e^{0,3t}$ individus au bout de t heures.

- a) Calculer $N(0)$ et $N(10)$.
- b) Calculer $\frac{N(t+1)}{N(t)}$ et interpréter en pourcentage.

Exercice 14 - Deux erreurs à ne pas faire

Un élève écrit : « $e^{a+b} = e^a + e^b$ » et « $e^{2x} = 2e^x$ ».

- a) Réfuter chaque égalité par un exemple.
- b) Rétablir les formules correctes.

Exercice 15 - Cosinus et sinus hyperboliques

On pose, pour tout réel x , $C(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- a) Démontrer que $C(x)^2 - S(x)^2 = 1$.
- b) Montrer que $C' = S$ et $S' = C$.