

Plaquette 2 - Dérivée et variations

Fonction exponentielle — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On dérive avec $(e^u)' = u'e^u$ et les formules du produit et du quotient, puis on **factorise par l'exponentielle**. Comme elle est strictement positive, le signe de la dérivée se lit sur le facteur qui reste. Les variations donnent les **extremums**, les **inégalités** (via une fonction différence) et le **nombre de solutions** d'une équation.

Exercice 1 - Produit par une fonction affine

Soit $f(x) = (2x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Étudier les variations de f et donner son minimum.

Exercice 2 - Deux extremums

Soit $f(x) = x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que $f'(x) = x(x + 2)e^x$.
- Dresser le tableau de variations de f (sans les limites).

Exercice 3 - Un quotient

Soit $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- Montrer que $f'(x) = \frac{(x - 1)e^x}{x^2}$.
- En déduire que $e^x \geq ex$ pour tout $x > 0$.

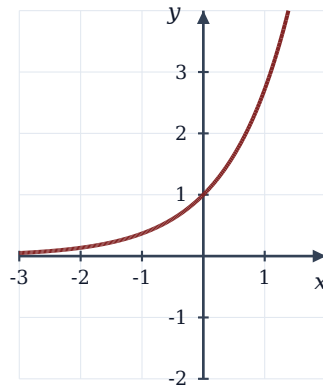
Exercice 4 - Avec e puissance moins x

Soit $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier les variations de f et donner son maximum.

Exercice 5 – La tangente en zéro

- Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse 0.
- On pose $g(x) = e^x - x - 1$. Étudier les variations de g .
- En déduire la position de la courbe de $\exp$ par rapport à T .

*Courbe de la fonction exponentielle***Exercice 6 – Tangente issue de l'origine**

- Écrire l'équation de la tangente T_a à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse a .
- Déterminer a pour que T_a passe par l'origine O , et donner son équation.

Exercice 7 – Convexité et cordes

- Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- En utilisant la position de la courbe par rapport à ses cordes, démontrer que pour tous réels a et b :

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$$

Exercice 8 – L'exponentielle domine x

Soit $f(x) = x - e^x$ sur $\mathbb{R}$.

- Étudier les variations de f .
- En déduire que $e^x > x$ pour tout réel x .

Exercice 9 – La fonction logistique

Soit $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
- Calculer $f(0)$ et montrer que $f(x) + f(-x) = 1$. Interpréter graphiquement.

Exercice 10 – La courbe en cloche

Soit $f(x) = e^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .

b) Montrer que $f'(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$ et étudier la convexité de f .

Exercice 11 - Combien de solutions ?

Soit $h(x) = e^x - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

- Étudier les variations de h et calculer son minimum.
- Sachant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^x = 3x$.

Exercice 12 - Une famille de fonctions

Pour $k > 0$, on pose $f_k(x) = e^x - kx$.

- Montrer que f_k admet un minimum égal à $k(1 - \ln k)$.
- Pour quelles valeurs de k a-t-on $e^x > kx$ pour tout réel x ?

Exercice 13 - Concentration d'un médicament

Après une injection, la concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) vaut $C(t) = 5te^{-0,5t}$, t en heures.

- Calculer $C'(t)$.
- À quel instant la concentration est-elle maximale ? Quelle est cette concentration ?

Exercice 14 - Point d'inflexion

Soit $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f(x)$ et $f''(x)$.
- Étudier la convexité de f et préciser son point d'inflexion.

Exercice 15 - Fixer le bon prix

Une entreprise vend un produit au prix p (en €). Le nombre d'articles vendus est $1\,000e^{-0,05p}$, donc la recette vaut $R(p) = 1\,000pe^{-0,05p}$ pour $p \in [0; 100]$.

- Calculer $R'(p)$.
- Quel prix maximise la recette ? Quelle est la recette maximale ?