

Plaquette 4 – Limites, asymptotes et modèles

Fonction exponentielle — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

En $+\infty$, l'exponentielle **écrase** toute puissance de x ; en $-\infty$, elle tend vers 0 et c'est la puissance qui l'emporte. On lève les indéterminations en **factorisant par le terme dominant** (souvent e^x ou e^{2x}), avec les **croissances comparées**, ou en reconnaissant un **nombre dérivé**. Dans un modèle, la limite en $+\infty$ est l'**état d'équilibre**.

Exercice 1 – Les limites de référence

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x)$

Exercice 2 – Polynôme fois exponentielle

Soit $f(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$.

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 3 – Un quotient d'exponentielles

Soit $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, et en déduire les asymptotes.

Exercice 4 – Le terme dominant change de camp

Soit $f(x) = e^{2x} - 3e^x + x$.

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 5 – Composées aux points sensibles

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x}{x+1}}$

Exercice 6 - Reconnaître un nombre dérivé

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$

Exercice 7 - Une asymptote oblique

Soit $f(x) = x + 2 - e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- b) Démontrer que la droite $\Delta: y = x + 2$ est asymptote en $+\infty$ et préciser la position de la courbe.

Exercice 8 - Étude complète de $x e^{-x}$ et puissance moins x

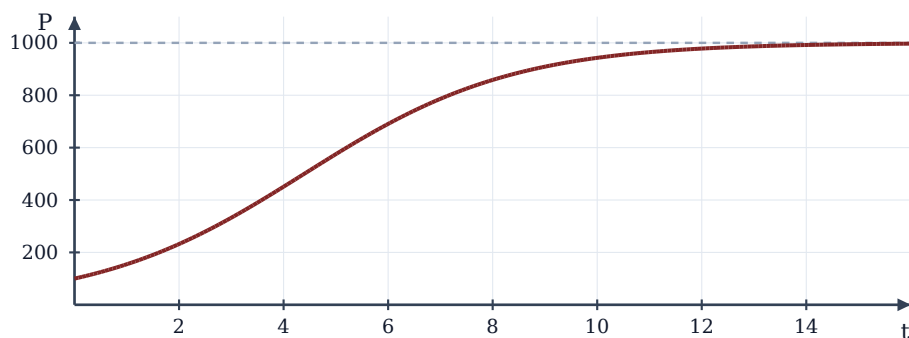
Soit $f(x) = x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet.

Exercice 9 - Une population qui sature

Une population de poissons dans un lac est modélisée par $P(t) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-0,5t}}$ (t en années).

- a) Calculer $P(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$. Interpréter.
- b) Au bout de combien de temps la population atteint-elle 900 poissons ?



Évolution de la population (courbe logistique)

Exercice 10 - Chute avec frottements

La vitesse (en m/s) d'un parachutiste avant l'ouverture de son parachute est $v(t) = 50(1 - e^{-0,2t})$, t en secondes.

- a) Déterminer la vitesse limite.
- b) Au bout de combien de temps atteint-il 95 % de cette vitesse ?
- c) Calculer $v'(0)$ et l'interpréter.

Exercice 11 - Compter les solutions grâce aux limites

Soit $f(x) = e^x - x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Étudier les variations de f , puis déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^x = x + 2$.

Exercice 12 - Deux suites

Déterminer la limite de :

- $u_n = n e^{-n}$
- $v_n = \frac{e^n + n}{e^n - n}$
- $w_n = \frac{2^n}{n^3}$

Exercice 13 - Exponentielle contre puissance dixième

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}}$.
- Comparer e^x et x^{10} pour $x = 10$ et pour $x = 40$.
- Que dit — et que ne dit pas — la limite du a) ?

Exercice 14 - Deux asymptotes horizontales

Soit $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$.

- Montrer que $f(x) = 2 - \frac{1}{e^x + 1}$.
- Déterminer les limites de f en $\pm\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à chaque asymptote.

Exercice 15 - Montée en température d'un four

Un four est allumé à $t = 0$. Sa température (en $^{\circ}\text{C}$) est $T(t) = 250 - 230 e^{-0,1t}$, t en minutes.

- Calculer $T(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$.
- Calculer $T'(t)$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter.
- Quand le four atteint-il 240°C ?