Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modèles de croissance, seuils et études

Fonction exponentielle — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On manipule les propriétés algébriques de exp, on résout équations et inéquations par **changement de variable**, on dérive des expressions en e^{u}, et on exploite les **croissances comparées** dans des modèles concrets.

Exercice 1 – Simplification d'expressions

Simplifier :

a) $A = \dfrac{e^{5} \times e^{-2}}{e^{4}}$

b) $B = \left(e^{2x}\right)^{3} \times e^{-5x}$

c) $C = \dfrac{e^{x} + e^{2x}}{e^{x}}$

Exercice 2 – Équation exponentielle simple

Résoudre $e^{2x-1} = e^{x+3}$, puis $e^{x^2} = e^{3x-2}$.

Exercice 3 – Changement de variable

Résoudre $e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0$.

Exercice 4 – Inéquation exponentielle

Résoudre $e^{x^2-3x} \leq 1$.

Exercice 5 – Dérivées avec exponentielle

Dériver :

a) $f(x) = e^{3x+1}$

b) $g(x) = x^{2}e^{-x}$

c) $h(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$

Exercice 6 – Étude de x e^x

Étudier $f(x) = (x-2)e^{x}$: variations, limites, extremum.

Exercice 7 – Croissances comparées

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - x}{e^{x} + x}$ et $\lim_{x \to -\infty} x^{3}e^{x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Inégalité e^x ≥ x+1

Démontrer que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x, et préciser le cas d'égalité.

Exercice 9 – Décroissance radioactive

Un isotope suit $N(t) = N_0 e^{-0{,}05t}$ (t en jours).

a) Calculer la demi-vie.

b) Au bout de combien de jours reste-t-il 10 % de l'isotope ?

Exercice 10 – Modèle de refroidissement

Un café à 85 °C refroidit dans une pièce à 20 °C selon $T(t) = 20 + 65e^{-0{,}04t}$ (t en minutes). Quand atteint-il 50 °C ?

Exercice 11 – Croissance d'une population

Une bactérie double toutes les 3 heures. Écrire le modèle $N(t) = N_0 e^{kt}$ et déterminer k, puis le temps pour multiplier la population par 100.

Exercice 12 – Fonction logistique

Soit $f(x) = \dfrac{10}{1 + e^{-x}}$. Étudier les variations, les limites, et donner le point d'inflexion.

Exercice 13 – Tangente et position

Soit $f(x) = e^{-x}$. Déterminer la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à elle.

Exercice 14 – Équation mixte exp et ln

Résoudre $e^x - e^{-x} = 2$.

Exercice 15 – Synthèse : étude complète type bac

Soit $f(x) = \left(x^2 - 2\right)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Étudier les variations et les limites.

b) Déterminer les points où la tangente est horizontale.

c) Déterminer le signe de f.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).