

**Plaquette 5 - Problèmes de synthèse :**  
**modèles de croissance, seuils et études**  
**Fonction exponentielle — Terminale spé maths**  
Exercices

**Méthode**

On manipule les propriétés algébriques de  $\exp$ , on résout équations et inéquations par **changement de variable**, on dérive des expressions en  $e^u$ , et on exploite les **croissances comparées** dans des modèles concrets.

**Exercice 1 - Simplification d'expressions**

Simplifier :

a)  $A = \frac{e^5 \times e^{-2}}{e^4}$

b)  $B = (e^{2x})^3 \times e^{-5x}$

c)  $C = \frac{e^x + e^{2x}}{e^x}$

**Exercice 2 - Équation exponentielle simple**

Résoudre  $e^{2x-1} = e^{x+3}$ , puis  $e^{x^2} = e^{3x-2}$ .

**Exercice 3 - Changement de variable**

Résoudre  $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ .

**Exercice 4 - Inéquation exponentielle**

Résoudre  $e^{x^2-3x} \leq 1$ .

**Exercice 5 - Dérivées avec exponentielle**

Dériver :

a)  $f(x) = e^{3x+1}$

b)  $g(x) = x^2 e^{-x}$

c)  $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

**Exercice 6 - Étude de  $x e^x$** 

Étudier  $f(x) = (x-2)e^x$  : variations, limites, extremum.

**Exercice 7 - Croissances comparées**

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + x}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x$ .

**Exercice 8 - Inégalité  $e^x \geq x+1$** 

Démontrer que  $e^x \geq x + 1$  pour tout réel  $x$ , et préciser le cas d'égalité.

**Exercice 9 - Décroissance radioactive**

Un isotope suit  $N(t) = N_0 e^{-0,05t}$  ( $t$  en jours).

- Calculer la demi-vie.
- Au bout de combien de jours reste-t-il 10 % de l'isotope ?

**Exercice 10 - Modèle de refroidissement**

Un café à 85 °C refroidit dans une pièce à 20 °C selon  $T(t) = 20 + 65e^{-0,04t}$  ( $t$  en minutes). Quand atteint-il 50 °C ?

**Exercice 11 - Croissance d'une population**

Une bactérie double toutes les 3 heures. Écrire le modèle  $N(t) = N_0 e^{kt}$  et déterminer  $k$ , puis le temps pour multiplier la population par 100.

**Exercice 12 - Fonction logistique**

Soit  $f(x) = \frac{10}{1 + e^{-x}}$ . Étudier les variations, les limites, et donner le point d'inflexion.

**Exercice 13 - Tangente et position**

Soit  $f(x) = e^{-x}$ . Déterminer la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à elle.

**Exercice 14 - Équation mixte exp et ln**

Résoudre  $e^x - e^{-x} = 2$ .

**Exercice 15 - Synthèse : étude complète type bac**

Soit  $f(x) = (x^2 - 2)e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Étudier les variations et les limites.
- Déterminer les points où la tangente est horizontale.
- Déterminer le signe de  $f$ .