Plaquette 1 – Définition, domaine et propriétés

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Pour tout réel $a > 0$, $\ln a$ est l'unique réel b tel que $\mathrm{e}^b = a$.

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^y \qquad (x > 0)$$

Conséquences : $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ pour $x > 0$, et $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ pour tout réel x.

Valeurs à connaître : $\ln 1 = 0$, $\ln \mathrm{e} = 1$, $\ln \dfrac{1}{\mathrm{e}} = -1$.

Ensemble de définition : ln est définie sur $]0\,;+\infty[$; $\ln(u(x))$ existe si et seulement si $u(x) > 0$.

Propriétés algébriques (pour $a > 0$, $b > 0$, n entier relatif) :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a \qquad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Signe : $\ln x < 0$ sur $]0\,;1[$, $\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ sur $]1\,;+\infty[$.

Croissance : ln est strictement croissante, donc $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ (pour $a, b > 0$).

⚠ $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$: il n'y a **aucune** formule pour le logarithme d'une somme.

Correction de l'exercice 1 – Revenir à la définition

On utilise la **définition** : $\ln a$ est l'exposant b tel que $\mathrm{e}^b = a$, et donc

$$\ln(\mathrm{e}^x) = x \qquad \mathrm{e}^{\ln x} = x \ (x > 0)$$

a) $\ln 1 = 0$ (car $\mathrm{e}^0 = 1$) ; $\ln \mathrm{e} = 1$; $\ln\left(\mathrm{e}^3\right) = 3$; $\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right) = -2$.

b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$, donc $\ln \dfrac{1}{\mathrm{e}} = -1$; $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{1/2}$, donc $\ln \sqrt{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2}$.

c) $\mathrm{e}^{\ln 5} = 5$; $\mathrm{e}^{-\ln 4} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 4}} = \dfrac{1}{4}$.

— **Réflexe** : écrire le nombre comme une **puissance de** e, puis lire l'exposant.

Réponse. a) 0, 1, 3, -2 · b) -1 et $\dfrac{1}{2}$ · c) 5 et $\dfrac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 2 – Chercher l'ensemble de définition

$\ln(u(x))$ existe si et seulement si

$$u(x) > 0$$

a) $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$: $D_f =]3\,;+\infty[$.

b) $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ (trinôme négatif à l'extérieur des racines) : $D_g =]-2\,;2[$.

c) $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout x : $D_h = \mathbb{R}$.

d) Tableau de signes du quotient :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Le quotient est strictement positif sur $D_k =]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[$.

— **Piège** : l'inégalité est **stricte** — $\ln 0$ n'existe pas.

Réponse. a) $]3\,;+\infty[$ · b) $]-2\,;2[$ · c) $\mathbb{R}$ · d) $]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 3 – Tout exprimer avec ln 2 et ln 3

On décompose en **facteurs premiers**, puis on applique les propriétés

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln(a^n) = n\ln a$$

a) $\ln 6 = \ln(2\times 3) = \ln 2 + \ln 3$; $\ln 12 = \ln\left(2^2\times 3\right) = 2\ln 2 + \ln 3$.

b) $\ln\frac{8}{9} = \ln\left(2^3\right) - \ln\left(3^2\right) = 3\ln 2 - 2\ln 3$.

c) $72 = 8\times 9 = 2^3\times 3^2$, donc $\ln 72 = 3\ln 2 + 2\ln 3$.

d) $\ln\sqrt{6} = \frac{1}{2}\ln 6 = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3)$.

— **Contrôle numérique** de c) : $3\times 0{,}693 + 2\times 1{,}099 = 4{,}277$ et $\ln 72 \approx 4{,}277$ ✓

Réponse. a) $\ln 2 + \ln 3$; $2\ln 2 + \ln 3$ · b) $3\ln 2 - 2\ln 3$ · c) $3\ln 2 + 2\ln 3$ · d) $\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3)$.

Correction de l'exercice 4 – Simplifier des expressions

On regroupe tout **en un seul logarithme** avec les propriétés algébriques.

a) On regroupe en un seul logarithme :

$$A = \ln\frac{50\times 2}{4} = \ln 25 = \ln\left(5^2\right) = 2\ln 5$$

b) $B = \ln\left(3^2\right) - \ln 18 + \ln 2 = \ln\frac{9\times 2}{18} = \ln 1 = 0$.

c) $\ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$ et $\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = -1$, donc $C = 2\times(-1) = -2$.

— **Piège en c)** : il s'agit d'un **produit** de logarithmes, pas du logarithme d'un produit. Aucune propriété ne simplifie $\ln a \times \ln b$; ici, chaque facteur se calcule séparément.

— **Contrôle de b)** : $2\times 1{,}0986 - 2{,}8904 + 0{,}6931 = 0{,}0000$ ✓

Réponse. $A = 2\ln 5$, $B = 0$, $C = -2$.

Correction de l'exercice 5 – Exponentielle et logarithme ensemble

On fait entrer les coefficients **dans** le logarithme avant d'appliquer $\mathrm{e}^{\ln a} = a$:

$$n\ln a = \ln(a^n) \qquad \mathrm{e}^{\ln a} = a$$

a) $2\ln 3 = \ln 9$, donc $\mathrm{e}^{2\ln 3} = \mathrm{e}^{\ln 9} = 9$.

b) $-\ln 2 = \ln\frac{1}{2}$, donc $\mathrm{e}^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$.

c) $\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{x+2}$, donc $\ln\left(\mathrm{e}^{x+2}\right) = x+2$.

d) $\ln x - \ln 2 = \ln\frac{x}{2}$, donc $\mathrm{e}^{\ln x - \ln 2} = \frac{x}{2}$.

— **Piège en a)** : $\mathrm{e}^{2\ln 3} \neq 2\times 3$. Le 2 devient un **exposant** de 3, pas un facteur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) 9 · b) $\frac{1}{2}$ · c) $x+2$ · d) $\frac{x}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Comparer deux puissances

a) On utilise la propriété des puissances :

$$\ln(a^n) = n\ln a$$

— $\ln\left(2^{10}\right) = 10\ln 2 \approx 6{,}931$;

— $\ln\left(10^3\right) = 3\ln 10 \approx 6{,}908$.

b) $\ln\left(2^{10}\right) > \ln\left(10^3\right)$. La fonction ln étant **strictement croissante**, elle conserve l'ordre dans les deux sens :

$$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$$

— Donc $2^{10} > 10^3$.

— **Contrôle** : $2^{10} = 1\,024 > 1\,000$ ✓

— **Intérêt** : pour des puissances énormes (2^{1000} contre 10^{300}), le logarithme ramène la comparaison à celle de deux nombres raisonnables.

Réponse. $10\ln 2 \approx 6{,}931 > 3\ln 10 \approx 6{,}908$, donc $2^{10} > 10^3$.

Correction de l'exercice 7 – Compter les chiffres d'un grand nombre

Un entier N s'écrit avec $p+1$ chiffres lorsque $10^p \leq N < 10^{p+1}$. On cherche donc p tel que $10^p \leq 2^{100} < 10^{p+1}$.

— Par **stricte croissance** de ln, cela équivaut à

$$p\ln 10 \leq 100\ln 2 < (p+1)\ln 10$$

— $100\ln 2 \approx 69{,}31$ et $\frac{69{,}31}{2{,}3026} \approx 30{,}10$.

— Donc $p = 30$: on a bien $30\ln 10 \approx 69{,}08 \leq 69{,}31 < 71{,}38 \approx 31\ln 10$.

2^{100} s'écrit avec 31 **chiffres**.

— **Contrôle** : $2^{100} \approx 1{,}27 \times 10^{30}$ ✓

— **Méthode** : le nombre de chiffres de N est la partie entière de $\frac{\ln N}{\ln 10}$, plus 1.

Réponse. 2^{100} a 31 chiffres.

Correction de l'exercice 8 – Une propriété qui n'existe pas

a) Avec $a = b = 1$: $\ln(1+1) = \ln 2 \approx 0{,}693$, alors que $\ln 1 + \ln 1 = 0$. Les deux membres diffèrent : **faux**.

b) $\frac{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)}{\ln \mathrm{e}} = \frac{2}{1} = 2$, alors que $\ln\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e} = 1$: **faux**.

c) La somme de deux logarithmes est le logarithme du **produit** :

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

— **Moyen mnémotechnique** : le logarithme transforme les **produits en sommes** (c'est même pour cela qu'il a été inventé, afin de simplifier les multiplications des astronomes). Il ne dit rien des sommes.

— **Vérification** de la bonne formule avec $a = b = 1$: $\ln 1 + \ln 1 = 0 = \ln 1$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $\ln 2 \neq 0$ · b) $2 \neq 1$ · c) $\ln a + \ln b = \ln(ab)$.

Correction de l'exercice 9 – Étudier un signe

a) ln est strictement croissante et $\ln 1 = 0$:

$$\ln x < 0 \text{ sur }]0\,;1[\qquad \ln x > 0 \text{ sur }]1\,;+\infty[$$

C'est ce que montre la courbe : elle est sous l'axe des abscisses avant 1, au-dessus après.

b) On croise les signes des deux facteurs :

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

— $f(x) > 0$ sur $]0\,;1[\cup]2\,;+\infty[$, $f(x) < 0$ sur $]1\,;2[$, et f s'annule en 1 et 2.
— **Contrôle** : $f(1{,}5) = -0{,}5 \times \ln 1{,}5 \approx -0{,}2 < 0$ ✓

Réponse. $f > 0$ sur $]0\,;1[\cup]2\,;+\infty[$, $f < 0$ sur $]1\,;2[$.

Correction de l'exercice 10 – Premières équations

On passe d'une forme à l'autre grâce à l'équivalence

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{y} \qquad (x > 0)$$

a) Pour $x > 0$: $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$.
b) $5 > 0$, donc $\mathrm{e}^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5 \approx 1{,}609$.
c) **Domaine** : $2x - 1 > 0$, soit $x > \dfrac{1}{2}$. Puis $\ln(2x-1) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, qui vérifie bien $x > \dfrac{1}{2}$.

— **Remarque sur b)** : l'équation $\mathrm{e}^x = -5$ n'aurait **aucune** solution, puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive.

Réponse. a) $x = \mathrm{e}^2$ · b) $x = \ln 5$ · c) $x = 1$.

Correction de l'exercice 11 – Comparer sans calculatrice

On ramène chaque membre à **un seul logarithme**, puis on utilise la stricte croissance :

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b \qquad (a, b > 0)$$

a) $\ln 3 + \ln 5 = \ln 15$ et $15 > 14$, donc $\ln 3 + \ln 5 > \ln 14$.
b) $3\ln 2 = \ln 8$ et $2\ln 3 = \ln 9$; $8 < 9$, donc $3\ln 2 < 2\ln 3$.
c) $0{,}5 < 1$, donc $\ln 0{,}5 < \ln 1 = 0$.

— **Contrôle de b)** : $3 \times 0{,}693 = 2{,}079$ et $2 \times 1{,}099 \approx 2{,}197$ ✓
— **Méthode** : on ne compare pas des logarithmes « à vue », on compare les nombres qu'il y a dedans.

Réponse. a) $\ln 3 + \ln 5 > \ln 14$ · b) $3\ln 2 < 2\ln 3$ · c) $\ln 0{,}5 < 0$.

Correction de l'exercice 12 – Démontrer les propriétés

a) Avec $b = \dfrac{1}{a}$: $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{a}$. Or $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ et $\ln 1 = 0$, d'où

$$0 = \ln a + \ln \frac{1}{a} \qquad \text{soit} \qquad \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, donc

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

d'après a).

c) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, donc $\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a}$, et $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

— **À retenir** : toutes les propriétés algébriques découlent de la seule relation $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Réponse. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Correction de l'exercice 13 – Deux conjugués

Existence : $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$ (car $x + 1 > x$ et la racine est strictement croissante), donc $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} > 0$; et $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0$. Les deux logarithmes existent.

Produit des deux quantités (identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$) :

$$\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = (x+1) - x = 1$$

— En prenant le logarithme : $\ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) + \ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = \ln 1 = 0$.

— D'où l'égalité demandée.

— **Idée** : deux nombres positifs **inverses** l'un de l'autre ont des logarithmes **opposés** ($\ln \frac{1}{a} = -\ln a$).

— **Contrôle** en $x = 0$: $\ln 1 = 0 = -\ln 1$ ✓

Réponse. Le produit des deux quantités vaut 1 : leurs logarithmes sont opposés.

Correction de l'exercice 14 – Le décibel

a) Pour $I = I_0$: $L = \frac{10}{\ln 10} \ln 1 = 0$ dB (seuil d'audition).

Pour $I = 1\,000\, I_0$: $L = \frac{10}{\ln 10} \ln\left(10^3\right) = \frac{10}{\ln 10} \times 3 \ln 10 = 30$ dB.

b) Avec une intensité $2I$:

$$L' = \frac{10}{\ln 10} \ln \frac{2I}{I_0} = \frac{10}{\ln 10}\left(\ln 2 + \ln \frac{I}{I_0}\right) = L + \frac{10 \ln 2}{\ln 10}$$

— Le niveau augmente de $\frac{10 \ln 2}{\ln 10} \approx \frac{6{,}931}{2{,}303} \approx 3{,}0$ dB, **quel que soit** le niveau de départ.

— **Interprétation** : doubler l'intensité n'ajoute que 3 dB ; le logarithme transforme la **multiplication** de l'intensité en **addition** de décibels.

Réponse. a) 0 dB et 30 dB · b) +3 dB environ.

Correction de l'exercice 15 – Valeurs approchées par les propriétés

On écrit chaque nombre comme **produit ou quotient** de 2, 3 et 5 :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

— $\ln 10 = \ln(2 \times 5) \approx 0{,}693 + 1{,}609 = 2{,}302$;

— $\ln 0{,}6 = \ln \frac{3}{5} \approx 1{,}099 - 1{,}609 = -0{,}510$;

— $\ln 1{,}5 = \ln \frac{3}{2} \approx 1{,}099 - 0{,}693 = 0{,}406$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\ln 2{,}5 = \ln \frac{5}{2} \approx 1{,}609 - 0{,}693 = 0{,}916$.

— **Cohérence des signes** : $0{,}6 < 1$ donne un logarithme **négatif**, les autres nombres étant > 1 donnent des logarithmes positifs ✓

— **Précision** : à la calculatrice, $\ln 0{,}6 \approx -0{,}5108$; l'erreur vient des arrondis de départ.

Réponse. $\ln 10 \approx 2{,}302$; $\ln 0{,}6 \approx -0{,}510$; $\ln 1{,}5 \approx 0{,}406$; $\ln 2{,}5 \approx 0{,}916$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).