

Plaquette 1 - Définition, domaine et propriétés

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Pour tout réel $a > 0$, $\ln a$ est l'unique réel b tel que $e^b = a$.

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y \quad (x > 0)$$

Conséquences : $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$, et $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x .

Valeurs à connaître : $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln \frac{1}{e} = -1$.

Ensemble de définition : $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$; $\ln(u(x))$ existe si et seulement si $u(x) > 0$.

Propriétés algébriques (pour $a > 0$, $b > 0$, n entier relatif) :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Signe : $\ln x < 0$ sur $]0; 1[$, $\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Croissance : $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ (pour $a, b > 0$).

$\triangle \ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$: il n'y a **aucune** formule pour le logarithme d'une somme.

Correction de l'exercice 1 - Revenir à la définition

On utilise la **définition** : $\ln a$ est l'exposant b tel que $e^b = a$, et donc

$$\ln(e^x) = x \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$$

a) $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) ; $\ln e = 1$; $\ln(e^3) = 3$; $\ln(e^{-2}) = -2$.

b) $\frac{1}{e} = e^{-1}$, donc $\ln \frac{1}{e} = -1$; $\sqrt{e} = e^{1/2}$, donc $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$.

c) $e^{\ln 5} = 5$; $e^{-\ln 4} = \frac{1}{e^{\ln 4}} = \frac{1}{4}$.

— **Réflexe** : écrire le nombre comme une **puissance de** e , puis lire l'exposant.

Réponse. a) 0, 1, 3, -2 · b) -1 et $\frac{1}{2}$ · c) 5 et $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 2 - Chercher l'ensemble de définition

$\ln(u(x))$ existe si et seulement si

$$u(x) > 0$$

a) $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$: $D_f =]3; +\infty[$.

b) $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ (trinôme négatif à l'extérieur des racines) : $D_g =]-2; 2[$.

c) $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout x : $D_h = \mathbb{R}$.

d) Tableau de signes du quotient :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	

Le quotient est strictement positif sur $D_k =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

— **Piège** : l'inégalité est **stricte** — $\ln 0$ n'existe pas.

Réponse. a) $]3; +\infty[\cdot b)]-2; 2[\cdot c) \mathbb{R} \cdot d)]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

Correction de l'exercice 3 - Tout exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$

On décompose en **facteurs premiers**, puis on applique les propriétés

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

a) $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$; $\ln 12 = \ln(2^2 \times 3) = 2 \ln 2 + \ln 3$.

b) $\ln \frac{8}{9} = \ln(2^3) - \ln(3^2) = 3 \ln 2 - 2 \ln 3$.

c) $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$, donc $\ln 72 = 3 \ln 2 + 2 \ln 3$.

d) $\ln \sqrt{6} = \frac{1}{2} \ln 6 = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln 3)$.

— **Contrôle numérique** de c) : $3 \times 0,693 + 2 \times 1,099 = 4,277$ et $\ln 72 \approx 4,277$ ✓

Réponse. a) $\ln 2 + \ln 3$; $2 \ln 2 + \ln 3$ · b) $3 \ln 2 - 2 \ln 3$ · c) $3 \ln 2 + 2 \ln 3$ · d) $\frac{1}{2} (\ln 2 + \ln 3)$.

Correction de l'exercice 4 - Simplifier des expressions

On regroupe tout **en un seul logarithme** avec les propriétés algébriques.

a) On regroupe en un seul logarithme :

$$A = \ln \frac{50 \times 2}{4} = \ln 25 = \ln(5^2) = 2 \ln 5$$

b) $B = \ln(3^2) - \ln 18 + \ln 2 = \ln \frac{9 \times 2}{18} = \ln 1 = 0$.

c) $\ln(e^2) = 2$ et $\ln(e^{-1}) = -1$, donc $C = 2 \times (-1) = -2$.

— **Piège en c)** : il s'agit d'un **produit** de logarithmes, pas du logarithme d'un produit. Aucune propriété ne simplifie $\ln a \times \ln b$; ici, chaque facteur se calcule séparément.

— **Contrôle de b)** : $2 \times 1,0986 - 2,8904 + 0,6931 = 0,0000$ ✓

Réponse. $A = 2 \ln 5$, $B = 0$, $C = -2$.

Correction de l'exercice 5 - Exponentielle et logarithme ensemble

On fait entrer les coefficients **dans** le logarithme avant d'appliquer $e^{\ln a} = a$:

$$n \ln a = \ln(a^n) \quad e^{\ln a} = a$$

a) $2 \ln 3 = \ln 9$, donc $e^{2 \ln 3} = e^{\ln 9} = 9$.

b) $-\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$, donc $e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$.

c) $e^x \times e^2 = e^{x+2}$, donc $\ln(e^{x+2}) = x + 2$.

d) $\ln x - \ln 2 = \ln \frac{x}{2}$, donc $e^{\ln x - \ln 2} = \frac{x}{2}$.

— **Piège en a)** : $e^{2 \ln 3} \neq 2 \times 3$. Le 2 devient un **exposant** de 3, pas un facteur.

Réponse. a) $9 \cdot$ b) $\frac{1}{2} \cdot$ c) $\times + 2 \cdot$ d) $\frac{x}{2}$.

Correction de l'exercice 6 - Comparer deux puissances

a) On utilise la propriété des puissances :

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$- \ln(2^{10}) = 10 \ln 2 \approx 6,931 ;$$

$$- \ln(10^3) = 3 \ln 10 \approx 6,908.$$

b) $\ln(2^{10}) > \ln(10^3)$. La fonction $\ln$ étant **strictement croissante**, elle conserve l'ordre dans les deux sens :

$$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$$

$$- \text{Donc } 2^{10} > 10^3.$$

$$- \textbf{Contrôle} : 2^{10} = 1\,024 > 1\,000 \checkmark$$

- **Intérêt** : pour des puissances énormes (2^{1000} contre 10^{300}), le logarithme ramène la comparaison à celle de deux nombres raisonnables.

Réponse. $10 \ln 2 \approx 6,931 > 3 \ln 10 \approx 6,908$, donc $2^{10} > 10^3$.

Correction de l'exercice 7 - Compter les chiffres d'un grand nombre

Un entier N s'écrit avec $p + 1$ chiffres lorsque $10^p \leq N < 10^{p+1}$. On cherche donc p tel que $10^p \leq 2^{100} < 10^{p+1}$.

- Par **stricte croissance** de $\ln$, cela équivaut à

$$p \ln 10 \leq 100 \ln 2 < (p + 1) \ln 10$$

$$- 100 \ln 2 \approx 69,31 \text{ et } \frac{69,31}{2,3026} \approx 30,10.$$

$$- \text{Donc } p = 30 : \text{on a bien } 30 \ln 10 \approx 69,08 \leq 69,31 < 71,38 \approx 31 \ln 10.$$

2^{100} s'écrit avec 31 **chiffres**.

$$- \textbf{Contrôle} : 2^{100} \approx 1,27 \times 10^{30} \checkmark$$

- **Méthode** : le nombre de chiffres de N est la partie entière de $\frac{\ln N}{\ln 10}$, plus 1.

Réponse. 2^{100} a 31 chiffres.

Correction de l'exercice 8 - Une propriété qui n'existe pas

a) Avec $a = b = 1$: $\ln(1 + 1) = \ln 2 \approx 0,693$, alors que $\ln 1 + \ln 1 = 0$. Les deux membres diffèrent : **faux**.

$$b) \frac{\ln(e^2)}{\ln e} = \frac{2}{1} = 2, \text{ alors que } \ln \frac{e^2}{e} = \ln e = 1 : \textbf{faux}.$$

c) La somme de deux logarithmes est le logarithme du **produit** :

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

- **Moyen mnémotechnique** : le logarithme transforme les **produits en sommes** (c'est même pour cela qu'il a été inventé, afin de simplifier les multiplications des astronomes). Il ne dit rien des sommes.

- **Vérification** de la bonne formule avec $a = b = 1$: $\ln 1 + \ln 1 = 0 = \ln 1 \checkmark$

Réponse. a) $\ln 2 \neq 0$ · b) $2 \neq 1$ · c) $\ln a + \ln b = \ln(ab)$.

Correction de l'exercice 9 – Étudier un signe

a) $\ln$ est strictement croissante et $\ln 1 = 0$:

$$\ln x < 0 \text{ sur }]0; 1[\quad \ln x > 0 \text{ sur }]1; +\infty[$$

C'est ce que montre la courbe : elle est sous l'axe des abscisses avant 1, au-dessus après.

b) On croise les signes des deux facteurs :

x	0		1		2		$+\infty$
$x - 2$		–		–	0	+	
$\ln x$		–	0	+		+	
$f(x)$		+	0	–	0	+	

— $f(x) > 0$ sur $]0; 1[\cup]2; +\infty[$, $f(x) < 0$ sur $]1; 2[$, et f s'annule en 1 et 2.

— **Contrôle** : $f(1,5) = -0,5 \times \ln 1,5 \approx -0,2 < 0$ ✓

Réponse. $f > 0$ sur $]0; 1[\cup]2; +\infty[$, $f < 0$ sur $]1; 2[$.

Correction de l'exercice 10 – Premières équations

On passe d'une forme à l'autre grâce à l'équivalence

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y \quad (x > 0)$$

a) Pour $x > 0$: $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 \approx 7,39$.

b) $5 > 0$, donc $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5 \approx 1,609$.

c) **Domaine** : $2x - 1 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$. Puis $\ln(2x - 1) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, qui vérifie bien $x > \frac{1}{2}$.

— **Remarque sur b)** : l'équation $e^x = -5$ n'aurait **aucune** solution, puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive.

Réponse. a) $x = e^2$ · b) $x = \ln 5$ · c) $x = 1$.

Correction de l'exercice 11 – Comparer sans calculatrice

On ramène chaque membre à **un seul logarithme**, puis on utilise la stricte croissance :

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b \quad (a, b > 0)$$

a) $\ln 3 + \ln 5 = \ln 15$ et $15 > 14$, donc $\ln 3 + \ln 5 > \ln 14$.

b) $3 \ln 2 = \ln 8$ et $2 \ln 3 = \ln 9$; $8 < 9$, donc $3 \ln 2 < 2 \ln 3$.

c) $0,5 < 1$, donc $\ln 0,5 < \ln 1 = 0$.

— **Contrôle de b)** : $3 \times 0,693 = 2,079$ et $2 \times 1,099 = 2,197$ ✓

— **Méthode** : on ne compare pas des logarithmes « à vue », on compare les nombres qu'il y a dedans.

Réponse. a) $\ln 3 + \ln 5 > \ln 14$ · b) $3 \ln 2 < 2 \ln 3$ · c) $\ln 0,5 < 0$.

Correction de l'exercice 12 – Démontrer les propriétés

a) Avec $b = \frac{1}{a}$: $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$. Or $a \times \frac{1}{a} = 1$ et $\ln 1 = 0$, d'où

$$0 = \ln a + \ln \frac{1}{a} \quad \text{soit} \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

b) $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, donc

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

d'après a).

c) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, donc $\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a}$, et $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

— **À retenir** : toutes les propriétés algébriques découlent de la seule relation $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Réponse. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Correction de l'exercice 13 - Deux conjugués

Existence : $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$ (car $x+1 > x$ et la racine est strictement croissante), donc $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} > 0$; et $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0$. Les deux logarithmes existent.

Produit des deux quantités (identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$) :

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = (x+1) - x = 1$$

— En prenant le logarithme : $\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = \ln 1 = 0$.

— D'où l'égalité demandée.

— **Idée** : deux nombres positifs **inverses** l'un de l'autre ont des logarithmes **opposés** ($\ln \frac{1}{a} = -\ln a$).

— **Contrôle** en $x = 0$: $\ln 1 = 0 = -\ln 1$ ✓

Réponse. Le produit des deux quantités vaut 1 : leurs logarithmes sont opposés.

Correction de l'exercice 14 - Le décibel

a) Pour $I = I_0$: $L = \frac{10}{\ln 10} \ln 1 = 0$ dB (seuil d'audition).

Pour $I = 1\,000 I_0$: $L = \frac{10}{\ln 10} \ln(10^3) = \frac{10}{\ln 10} \times 3 \ln 10 = 30$ dB.

b) Avec une intensité $2I$:

$$L' = \frac{10}{\ln 10} \ln \frac{2I}{I_0} = \frac{10}{\ln 10} \left(\ln 2 + \ln \frac{I}{I_0} \right) = L + \frac{10 \ln 2}{\ln 10}$$

— Le niveau augmente de $\frac{10 \ln 2}{\ln 10} \approx \frac{6,931}{2,303} \approx 3,0$ dB, **quel que soit** le niveau de départ.

— **Interprétation** : doubler l'intensité n'ajoute que 3 dB ; le logarithme transforme la **multiplication** de l'intensité en **addition** de décibels.

Réponse. a) 0 dB et 30 dB · b) +3 dB environ.

Correction de l'exercice 15 - Valeurs approchées par les propriétés

On écrit chaque nombre comme **produit ou quotient** de 2, 3 et 5 :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

— $\ln 10 = \ln(2 \times 5) \approx 0,693 + 1,609 = 2,302$;

— $\ln 0,6 = \ln \frac{3}{5} \approx 1,099 - 1,609 = -0,510$;

— $\ln 1,5 = \ln \frac{3}{2} \approx 1,099 - 0,693 = 0,406$;

- $\ln 2,5 = \ln \frac{5}{2} \approx 1,609 - 0,693 = 0,916$.
- **Cohérence des signes** : $0,6 < 1$ donne un logarithme **négalif**, les autres nombres étant > 1 donnent des logarithmes positifs ✓
- **Précision** : à la calculatrice, $\ln 0,6 \approx -0,5108$; l'erreur vient des arrondis de départ.

Réponse. $\ln 10 \approx 2,302$; $\ln 0,6 \approx -0,510$; $\ln 1,5 \approx 0,406$; $\ln 2,5 \approx 0,916$.