

Plaquette 2 - Dérivée et variations du logarithme

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées. $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$$

Variations : $\frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$, donc $\ln$ est **strictement croissante**. $\ln u$ a les **mêmes variations** que u .

Tangentes remarquables : en 1, $y = x - 1$; en e , $y = \frac{x}{e}$ (elle passe par l'origine).

Convexité : $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, la fonction $\ln$ est **concave** : sa courbe est **sous** ses tangentes. En particulier :

$$\ln x \leq x - 1 \quad \text{pour tout } x > 0$$

Rappels : $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démontrer une inégalité $f \geq g$: étudier les variations de $h = f - g$ et montrer que son minimum est positif ou nul.

Correction de l'exercice 1 - Un premier maximum

a) Avec $(\ln x)' = \frac{1}{x}$:

$$f(x) = \frac{3}{x} - 1 = \frac{3-x}{x}$$

b) Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$: le signe de $f(x)$ est celui de $3 - x$.

x	0		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	
f		croissante	$3 \ln 3 - 3$	décroissante	

— **Maximum** : $f(3) = 3 \ln 3 - 3 \approx 0,296$.

— **Réflexe** : réduire au même dénominateur x , qui est positif, pour ne garder qu'un signe à étudier.

Réponse. $f(x) = \frac{3-x}{x}$; maximum $3 \ln 3 - 3 \approx 0,296$ en $x = 3$.

Correction de l'exercice 2 - $x \ln x$

a) $f = uv$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$:

$$f(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

— $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$ (stricte croissance de $\ln$).

— f est **décroissante** sur $]0; \frac{1}{e}]$ et **croissante** sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$.

— **Minimum** :

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1) = -\frac{1}{e} \approx -0,368$$

— **Méthode** : pour résoudre $\ln x = k$, on passe à l'exponentielle : $x = e^k$.

Réponse. $f(x) = \ln x + 1$; minimum $-\frac{1}{e}$ en $x = \frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 3 - $\ln x$ sur x

a) Formule du quotient avec $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

b) $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 - \ln x$.

— $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$.

— f est **croissante** sur $]0; e]$, **décroissante** sur $[e; +\infty[$.

— **Maximum** : $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

— **Conséquence** : $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ pour tout $x > 0$. En l'appliquant à $x = \pi$, on obtient $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$, qui équivaut à $\pi^e < e^\pi$.

Réponse. Croissante sur $]0; e]$, décroissante ensuite ; maximum $\frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 4 - Dériver $\ln u$

On identifie u (strictement positive sur l'intervalle), puis

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

a) $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

b) $u(x) = 2x - 3 > 0$ sur l'intervalle, $u'(x) = 2$: $g'(x) = \frac{2}{2x - 3}$.

c) $u(x) = e^x + 1 > 0$, $u'(x) = e^x$: $h'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Variations :

— $f'(x)$ a le signe de x : f décroît puis croît, minimum $f(0) = 0$;

— $g'(x) > 0$ et $h'(x) > 0$: g et h sont croissantes.

— **À retenir** : $\ln u$ varie **comme** u ; la dérivée le confirme puisque $u > 0$.

Réponse. a) $\frac{2x}{x^2 + 1}$ · b) $\frac{2}{2x - 3}$ · c) $\frac{e^x}{e^x + 1}$.

Correction de l'exercice 5 - Deux tangentes remarquables

On applique la formule de la tangente en a avec $\ln'(a) = \frac{1}{a}$:

$$y = \frac{1}{a}(x - a) + \ln a$$

a) En $a = 1$: $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = 1$, donc $T_1: y = x - 1$.

b) En $a = e$: $\ln e = 1$ et $\ln'(e) = \frac{1}{e}$, donc

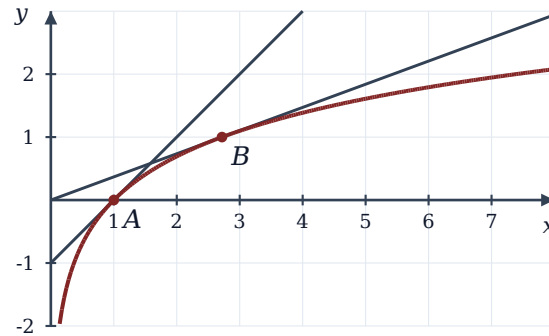
$$T_2: y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{x}{e}$$

Son ordonnée à l'origine est nulle : T_2 **passe par l'origine**. C'est la seule tangente à la courbe de $\ln$ issue de O .

c) T_1 passe par $(0; -1)$ et $(4; 3)$; T_2 passe par O et par $(8; 2,94)$.

— **Observation** : la courbe est **sous** ses deux tangentes — la fonction $\ln$ est concave.

Réponse. $T_1: y = x - 1$; $T_2: y = \frac{x}{e}$, qui passe par l'origine.



$T_1 : y = x - 1$ en $A(1; 0)$; $T_2 : y = x/e$ en $B(e; 1)$, qui passe par O

Correction de l'exercice 6 - Démontrer $\ln x \leq x - 1$

a) $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Sur $]0; +\infty[$, $g'(x)$ a le signe de $x - 1$:

— g est **décroissante** sur $]0; 1]$ et **croissante** sur $[1; +\infty[$;

— son minimum est $g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$.

b) Pour tout $x > 0$, $g(x) \geq g(1) = 0$, soit

$$\ln x \leq x - 1$$

avec égalité seulement pour $x = 1$.

Interprétation : la droite $y = x - 1$ est la **tangente** à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 1 ; la courbe est toujours **en dessous**.

— **Application** : $\ln 1,1 \leq 0,1$ (valeur exacte $\approx 0,0953$) ; plus x est proche de 1, meilleure est l'approximation $\ln x \approx x - 1$.

Réponse. g a pour minimum $g(1) = 0$, donc $\ln x \leq x - 1$.

Correction de l'exercice 7 - Un minimum en 1

a) On dérive, puis on réduit au même dénominateur :

$$f(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$$

b) Sur $]0; +\infty[$: $x > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $f(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$ a le signe de $x - 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	
f		décroissante	1	croissante	

— **Minimum** : $f(1) = 1 - 2 \ln 1 = 1$.

— Donc $f(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$, soit $x^2 - 1 \geq 2 \ln x$.

— **Piège** : $x^2 - 1$ s'annule aussi en -1 , mais -1 n'est **pas** dans l'intervalle d'étude.

Réponse. Minimum $f(1) = 1$: $f(x) \geq 1$ sur $]0; +\infty[$.

Correction de l'exercice 8 - Logarithme d'un trinôme

a) Le trinôme $x^2 - 4x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$: il est toujours strictement positif. Son logarithme existe pour tout réel x .

b) Avec $u(x) = x^2 - 4x + 5$ et $u'(x) = 2x - 4$:

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$$

Le dénominateur est positif : $f(x)$ a le signe de $2x - 4$. f est **décroissante** sur $] -\infty; 2]$, **croissante** sur $[2; +\infty[$.

c) **Minimum** : $f(2) = \ln(4 - 8 + 5) = \ln 1 = 0$.

— **Cohérence** : le trinôme a son minimum 1 en $x = 2$ (forme canonique $(x - 2)^2 + 1$), et $\ln$ étant croissante, f a son minimum au même endroit, égal à $\ln 1$.

Réponse. $f(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$; minimum 0 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 9 - Une équation à solution unique

a) On dérive et on réduit au même dénominateur :

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e - x}{ex}$$

Sur $]0; +\infty[$, le signe est celui de $e - x$: h est **croissante** sur $]0; e]$, **décroissante** sur $[e; +\infty[$.

— **Maximum** : $h(e) = \ln e - \frac{e}{e} = 1 - 1 = 0$.

b) Pour tout $x \neq e$, $h(x) < h(e) = 0$ (stricte monotonie de part et d'autre de e). L'équation $h(x) = 0$ n'a donc qu'une seule solution : $x = e$.

— **Interprétation** : la droite $y = \frac{x}{e}$ est la tangente à la courbe de $\ln$ en e ; elle ne la touche qu'en ce point, et la courbe est en dessous partout ailleurs.

Réponse. Maximum $h(e) = 0$; l'unique solution est $x = e$.

Correction de l'exercice 10 - La concavité du logarithme

a) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $]0; +\infty[$: la fonction $\ln$ est **concave**.

b) Pour une fonction concave, **toute corde est sous la courbe** : le milieu de la corde entre les points d'abscisses a et b est sous le point de la courbe d'abscisse $\frac{a+b}{2}$. Cela s'écrit

$$\frac{\ln a + \ln b}{2} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

c) Le membre de gauche vaut $\frac{1}{2} \ln(ab) = \ln\sqrt{ab}$. On a donc $\ln\sqrt{ab} \leq \ln\frac{a+b}{2}$ et, par croissance de $\ln$,

— $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$: la moyenne **géométrique** est inférieure à la moyenne **arithmétique**.

— **Contrôle** : $a = 1$, $b = 9$: $\sqrt{9} = 3 \leq 5$ ✓

Réponse. $\ln'' < 0$: $\ln$ concave, d'où $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Correction de l'exercice 11 - Le carré du logarithme

a) $f = u^2$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$. D'après $(u^2)' = 2u'u$:

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$$

b) Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$: $f(x)$ a le signe de $\ln x$.

— $f'(x) < 0$ sur $]0; 1[$: f est **décroissante** ;

— $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$: f est **croissante**.

— **Minimum** : $f(1) = (\ln 1)^2 = 0$.

— **Cohérence** : un carré est toujours positif ou nul, et il vaut 0 exactement quand $\ln x = 0$, soit $x = 1$ ✓

— **Piège** : $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2) = 2 \ln x$.

Réponse. $f(x) = \frac{2 \ln x}{x}$; minimum 0 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 12 - Bénéfice d'une entreprise

a) La dérivée de $\ln(x+1)$ est $\frac{1}{x+1}$:

$$B'(x) = \frac{10}{x+1} - 1 = \frac{10 - (x+1)}{x+1} = \frac{9-x}{x+1}$$

b) Sur $[0; 20]$, $x+1 > 0$: $B'(x)$ a le signe de $9-x$.

— B est **croissante** sur $[0; 9]$ et **décroissante** sur $[9; 20]$.

— Le bénéfice est maximal pour $x = 9$ tonnes :

$$B(9) = 10 \ln 10 - 9 \approx 14,03$$

soit environ 14 030 €.

— **Interprétation** : $B'(x)$ est le **bénéfice marginal**. Au-delà de 9 tonnes, une tonne supplémentaire rapporte moins qu'elle ne coûte ($B' < 0$).

— **Contrôle** : $B(8) \approx 13,97$ et $B(10) \approx 13,98$, tous deux inférieurs à $B(9)$ ✓

Réponse. $B'(x) = \frac{9-x}{x+1}$; maximum $10 \ln 10 - 9 \approx 14,03$ pour 9 tonnes.

Correction de l'exercice 13 - Logarithme d'un quotient

a) Pour $x > 1$, $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$: on peut appliquer

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

b) En dérivant chaque terme :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}$$

— Sur $]1; +\infty[$, $x^2 - 1 > 0$, donc $f'(x) < 0$: f est **strictement décroissante**.

— **Intérêt de a)** : dériver $\ln \frac{x+1}{x-1}$ directement obligerait à dériver un quotient à l'intérieur ; séparer en deux logarithmes est bien plus rapide.

— **Attention** : la séparation n'est valable que si **chaque** facteur est positif ; sur $] -\infty; -1[$, il faudrait écrire $\ln(-x-1) - \ln(1-x)$.

Réponse. $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1} < 0$: f est décroissante.

Correction de l'exercice 14 - Une fonction dont la dérivée est $\ln$

a) Avec $(x \ln x)' = \ln x + 1$ (dérivée d'un produit) :

$$g'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

b) Le signe de $g'(x) = \ln x$ est connu : négatif sur $]0; 1[$, positif sur $]1; +\infty[$.

— g est **décroissante** sur $]0; 1[$, **croissante** sur $]1; +\infty[$.

— $g(1) = 0 - 1 = -1$: c'est le **minimum**.

— $g(e) = e \times 1 - e = 0$.

— **À retenir** : g est une **primitive** de $\ln$ sur $]0; +\infty[$; ce résultat resservira pour calculer des intégrales du logarithme.

— **Contrôle** : $g(e^2) = 2e^2 - e^2 = e^2 > 0$, cohérent avec la croissance ✓

Réponse. $g'(x) = \ln x$; minimum $g(1) = -1$; $g(e) = 0$.

Correction de l'exercice 15 - Le logarithme contre la racine

a) Avec $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

(on a écrit $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$).

b) $2x > 0$: $h'(x)$ a le signe de $\sqrt{x} - 2$, positif pour $x > 4$.

— h est **décroissante** sur $]0; 4[$ et **croissante** sur $]4; +\infty[$.

— **Minimum** : $h(4) = 2 - \ln 4 \approx 2 - 1,386 = 0,614 > 0$.

— Donc $h(x) > 0$, c'est-à-dire $\ln x < \sqrt{x}$, pour tout $x > 0$.

— **Conséquence** : en divisant par x , $\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, ce qui permettra de démontrer que $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$.

Réponse. Minimum $h(4) = 2 - \ln 4 > 0$: $\ln x < \sqrt{x}$.