

## Plaquette 3 - Équations et inéquations logarithmiques

### Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**Équivalences de base** (pour  $a > 0, b > 0$ ) :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \quad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

$$\ln x = k \Leftrightarrow x = e^k \quad e^x = k \Leftrightarrow x = \ln k \quad (k > 0)$$

**Méthode pour**  $\ln u(x) = \ln v(x)$  :

- conditions :  $u(x) > 0$  **et**  $v(x) > 0$  ;
- résolution de  $u(x) = v(x)$  ;
- tri des solutions.

**Puissances** : pour  $q > 0, q^n = e^{n \ln q}$ . Pour résoudre  $q^n > A$  :

$$n \ln q > \ln A$$

puis on divise par  $\ln q$ , en **changeant le sens** de l'inégalité si  $\ln q < 0$ , c'est-à-dire si  $0 < q < 1$ .

**Changement de variable** : une équation en  $\ln x$  (ou en  $e^x$ ) de la forme  $a(\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$  se résout en posant  $X = \ln x$ .

**Demi-vie** : si  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ , la quantité est divisée par 2 au bout de  $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Équations de base

On applique

$$\ln A = k \Leftrightarrow A = e^k \quad \ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B$$

après avoir écrit la condition d'existence.

a)  $x > 0$  ;  $\ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3 \approx 20,1$ .

b) Condition :  $2x + 1 > 0$ , soit  $x > -\frac{1}{2}$ . Puis  $2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$ , qui convient.

c)  $x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$ .

d) Condition :  $x > 4$ . Puis  $x - 4 = e^2$ , soit  $x = 4 + e^2 \approx 11,39$ , qui convient.

— **Contrôle de b)** :  $\ln(2 \times 2 + 1) = \ln 5$  ✓

**Réponse.** a)  $e^3$  · b) 2 · c)  $\frac{1}{e}$  · d)  $4 + e^2$ .

#### Correction de l'exercice 2 - Somme de deux logarithmes

**1) Conditions** :  $x - 1 > 0$  **et**  $x + 1 > 0$ , soit  $x > 1$ . On résout sur  $]1 ; +\infty[$ .

**2) Regroupement** avec  $\ln a + \ln b = \ln(ab)$  :

$$\ln[(x-1)(x+1)] = \ln 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

— Solutions de cette équation :  $x = 2$  ou  $x = -2$ .

**3) Tri** : seule  $x = 2$  vérifie  $x > 1$ .

$$S = \{2\}$$

- **Contrôle** :  $\ln 1 + \ln 3 = \ln 3$  ✓
  - **Piège** : garder  $x = -2$  serait une faute ;  $\ln(-3)$  n'existe pas. L'équation  $x^2 - 1 = 3$  a plus de solutions que l'équation de départ, car elle a perdu les conditions d'existence.
- Réponse.**  $S = \{2\}$ .

### Correction de l'exercice 3 - Un produit sous le logarithme

**Conditions** :  $x > 0$  et  $x - 2 > 0$ , soit  $x > 2$ .

**Regroupement** :

$$\ln[x(x-2)] = \ln 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

- **Discriminant** :  $\Delta = 4 + 32 = 36$ , d'où les racines  $x = \frac{2+6}{2} = 4$  et  $x = \frac{2-6}{2} = -2$ .
- **Tri** : seule 4 vérifie  $x > 2$ .

$$S = \{4\}$$

- **Contrôle** :  $\ln 4 + \ln 2 = \ln 8$  ✓
  - **Méthode** : ne jamais oublier l'étape 3 ; c'est elle qui élimine la « fausse » solution  $-2$ .
- Réponse.**  $S = \{4\}$ .

### Correction de l'exercice 4 - Quand l'inconnue est en exposant

On prend le **logarithme** des deux membres (tous strictement positifs) :

$$e^A = k \Leftrightarrow A = \ln k \quad \ln(q^x) = x \ln q$$

- a)  $x = \ln 7 \approx 1,946$ .
- b)  $2x - 1 = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \ln 3}{2} \approx 1,049$ .
- c)  $3^x = 10 \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{\ln 3} \approx 2,096$  (on divise par  $\ln 3 > 0$ ).
- **Contrôle de c)** :  $3^2 = 9$  et  $3^3 = 27$ , donc la solution est un peu au-dessus de 2 ✓
- **Piège** :  $\frac{\ln 10}{\ln 3} \neq \ln \frac{10}{3}$ .

**Réponse.** a)  $\ln 7$  · b)  $\frac{1 + \ln 3}{2}$  · c)  $\frac{\ln 10}{\ln 3} \approx 2,096$ .

### Correction de l'exercice 5 - Premières inéquations

On utilise la **stricte croissance** de  $\ln$  et de  $\exp$ , qui conservent le sens des inégalités :

$$\ln A < \ln B \Leftrightarrow A < B \quad (A, B > 0)$$

- a) Condition  $x > 0$ .  $\ln x < 2 = \ln(e^2) \Leftrightarrow x < e^2$ . Solution :  $]0; e^2[$  — sur la figure, c'est là où la courbe est sous la droite  $y = 2$ .
- b) Condition  $3 - x > 0$ , soit  $x < 3$ . Puis  $\ln(3 - x) \geq 0 = \ln 1 \Leftrightarrow 3 - x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 2$ . Solution :  $] - \infty; 2]$ .
- c)  $e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$ . Solution :  $] \ln 5; +\infty[$ .
- **Piège en a)** : oublier la borne 0. Pour  $x \leq 0$ ,  $\ln x$  n'existe pas, l'inégalité non plus.

**Réponse.** a)  $]0; e^2[$  · b)  $] - \infty; 2]$  · c)  $] \ln 5; +\infty[$ .

### Correction de l'exercice 6 - Comparer deux logarithmes

**Conditions** :  $2x - 4 > 0$  (soit  $x > 2$ ) **et**  $x + 1 > 0$  (soit  $x > -1$ ). Les deux ensemble :  $x > 2$ .

**Résolution** sur  $]2; +\infty[$ , par stricte croissance de  $\ln$  :

$$\ln(2x - 4) \leq \ln(x + 1) \Leftrightarrow 2x - 4 \leq x + 1 \Leftrightarrow x \leq 5$$

**Intersection** avec les conditions :  $2 < x \leq 5$ .

$$S = ]2; 5]$$

- **Contrôle** en  $x = 3$  :  $\ln 2 \leq \ln 4$  ✓ ; en  $x = 6$  :  $\ln 8 > \ln 7$ , exclu ✓
- **Piège** : répondre  $] -\infty; 5]$  en oubliant les conditions ; pour  $x = 0$ ,  $\ln(-4)$  n'existe pas.

**Réponse.**  $S = ]2; 5]$ .

### Correction de l'exercice 7 - Un seuil pour une suite géométrique

On prend le logarithme des deux membres (positifs), par stricte croissance de  $\ln$  :

$$0,9^n < 0,01 \Leftrightarrow n \ln 0,9 < \ln 0,01$$

- $\ln 0,9 < 0$  (car  $0,9 < 1$ ) : en divisant, **on change le sens** de l'inégalité :

$$n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9} \approx \frac{-4,605}{-0,1054} \approx 43,7$$

- Le plus petit entier qui convient est  $n = 44$ .
- **Contrôle** :  $0,9^{43} \approx 0,0108$  (trop grand) et  $0,9^{44} \approx 0,0097$  ✓
- **Piège classique** : oublier que  $\ln 0,9$  est **négatif** et conclure  $n < 43,7$  — ce qui contredirait la décroissance de  $0,9^n$ .

**Réponse.**  $n = 44$ .

### Correction de l'exercice 8 - Doubler son capital

Après  $n$  années, le capital vaut  $C_n = 1\,000 \times 1,03^n$ . On cherche le plus petit  $n$  tel que  $C_n \geq 2\,000$  :

$$1,03^n \geq 2 \Leftrightarrow n \ln 1,03 \geq \ln 2 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,03}$$

(on divise par  $\ln 1,03 > 0$ , le sens est conservé).

- $\frac{\ln 2}{\ln 1,03} \approx \frac{0,6931}{0,02956} \approx 23,45$ .
- Il faut donc **24 ans**.
- **Contrôle** :  $1,03^{23} \approx 1,974$  et  $1,03^{24} \approx 2,033$  ✓
- **Remarque** : le résultat ne dépend pas du capital de départ. La « règle de 70 » des banquiers donne  $\frac{70}{3} \approx 23$  ans, car  $\ln 2 \approx 0,69$  et  $\ln(1 + t) \approx t$  pour un petit taux  $t$ .

**Réponse.** 24 ans.

### Correction de l'exercice 9 - Changement de variable en $\ln x$

On pose  $X = \ln x$  ; l'équation devient une équation du second degré :

$$X^2 - 3X + 2 = 0$$

- Racine évidente  $X = 1$  ; le produit des racines vaut 2, donc l'autre est  $X = 2$ . (Ou :  $\Delta = 9 - 8 = 1$ .)
- **Retour à  $x$**  :
- $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$  ;
- $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ .

$$S = \{e; e^2\}$$

- **Contrôle** pour  $x = e^2$  :  $4 - 6 + 2 = 0$  ✓
- **Piège** : ne pas s'arrêter à  $X = 1$  et  $X = 2$  ; ce sont les valeurs de  $\ln x$ , pas de  $x$ .

**Réponse.**  $S = \{e; e^2\}$ .

### Correction de l'exercice 10 - Changement de variable en exponentielle

On remarque que  $e^{2x} = (e^x)^2$  et on pose  $X = e^x$  (avec  $X > 0$ ) :

$$X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow (X - 2)(X - 3) = 0$$

- $X = 2$  ou  $X = 3$ , tous deux strictement positifs : ils conviennent.
- **Retour à  $x$**  :  $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$  ;  $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$ .

$$S = \{\ln 2; \ln 3\}$$

- **Contrôle** pour  $x = \ln 2$  :  $e^{2\ln 2} - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$  ✓
- **Condition**  $X > 0$  : si l'on avait trouvé  $X = -1$ , cette valeur aurait dû être **rejetée**, car  $e^x = -1$  n'a pas de solution.

**Réponse.**  $S = \{\ln 2; \ln 3\}$ .

### Correction de l'exercice 11 - Une inéquation en exponentielle

On multiplie les deux membres par  $e^x > 0$  (le sens est conservé), en utilisant  $e^x \times e^{-x} = 1$  :

$$e^{2x} + 3 > 4e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$$

- On pose  $X = e^x > 0$  :  $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3) > 0$ .
- Un trinôme de coefficient dominant positif est positif à l'extérieur des racines :  $X < 1$  ou  $X > 3$ .
- **Retour à  $x$**  :  $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$  ;  $e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$ .

$$S = ] - \infty; 0[ \cup ] \ln 3; +\infty[$$

- **Contrôle** en  $x = 0,5$  (hors solution) :  $1,649 + 1,820 = 3,469 < 4$  ✓

**Réponse.**  $S = ] - \infty; 0[ \cup ] \ln 3; +\infty[$ .

### Correction de l'exercice 12 - Datation au carbone 14

a) La **demi-vie**  $T$  vérifie  $N(T) = \frac{N_0}{2}$  :

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda T = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \times 10^{-4}$$

b) On cherche  $t$  tel que  $N(t) = 0,3 N_0$  :

- $e^{-\lambda t} = 0,3 \Leftrightarrow -\lambda t = \ln 0,3 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 0,3}{\lambda}$  ;
- $t = -\frac{5730 \ln 0,3}{\ln 2} \approx \frac{5730 \times 1,204}{0,6931} \approx 9950$ .

Le fossile a environ 9950 **ans**.

- **Contrôle** : 30 % est entre 50 % (une demi-vie, 5730 ans) et 25 % (deux demi-vies, 11460 ans) ✓

**Réponse.** a)  $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$  · b) environ 9950 ans.

### Correction de l'exercice 13 - Un système logarithmique

On pose  $a = \ln x$  et  $b = \ln y$  : le système devient **linéaire** :

$$a + b = 3 \quad a - b = 1$$

- En additionnant :  $2a = 4$ , donc  $a = 2$  ; puis  $b = 3 - 2 = 1$ .
- **Retour aux inconnues** :  $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$  ;  $\ln y = 1 \Leftrightarrow y = e$ .

Solution :  $(x; y) = (e^2; e)$ .

- **Contrôle** :  $\ln(e^2) + \ln e = 2 + 1 = 3$  et  $2 - 1 = 1$  ✓
- **Autre lecture** : la première équation dit  $xy = e^3$ , la seconde  $\frac{x}{y} = e$ .

**Réponse.**  $x = e^2$  et  $y = e$ .

### Correction de l'exercice 14 - Un produit de logarithmes

On pose  $X = \ln x$  : il faut  $X(X - 2) < 0$ .

$$X(X - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < X < 2$$

(un trinôme de coefficient dominant positif est négatif **entre** ses racines 0 et 2).

- **Retour à  $x$** , par stricte croissance de l'exponentielle :

$$0 < \ln x < 2 \Leftrightarrow e^0 < x < e^2 \Leftrightarrow 1 < x < e^2$$

$$S = ]1; e^2[$$

- **Contrôle** en  $x = e$  :  $1 \times (1 - 2) = -1 < 0$  ✓ ; en  $x = e^3$  :  $3 \times 1 > 0$ , exclu ✓

**Réponse.**  $S = ]1; e^2[$ .

### Correction de l'exercice 15 - Refroidissement et seuil

On résout  $T(t) < 40$  :

$$20 + 60 e^{-0,05t} < 40 \Leftrightarrow e^{-0,05t} < \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

- Par stricte croissance de  $\ln$  :  $-0,05t < \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$ .
- On divise par  $-0,05 < 0$ , **le sens change** :

$$t > \frac{\ln 3}{0,05} = 20 \ln 3 \approx 21,97$$

Le plat passe sous 40 °C au bout d'environ 22 **minutes**.

- **Contrôle** :  $T(22) = 20 + 60 e^{-1,1} \approx 20 + 19,97 = 39,97$  °C ✓
- **Méthode** : isoler l'exponentielle **avant** de prendre le logarithme.

**Réponse.**  $t > 20 \ln 3 \approx 22$  minutes.