

Plaquette 4 - Limites, asymptotes et applications

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites aux bornes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe de $\ln$.

Croissances comparées (pour tout entier $n \geq 1$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

Limites remarquables (nombres dérivés de $\ln$ en 1) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Composées : $\ln u(x) \rightarrow +\infty$ si $u(x) \rightarrow +\infty$; $\ln u(x) \rightarrow -\infty$ si $u(x) \rightarrow 0^+$; $\ln u(x) \rightarrow \ln \ell$ si $u(x) \rightarrow \ell > 0$.

Nombre de solutions de $f(x) = k$: sur chaque intervalle où f est continue et strictement monotone, on applique le **corollaire du TVI** avec les valeurs ou limites aux bornes.

Correction de l'exercice 1 - Limites sans indétermination

On part des limites de référence

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

et on applique les règles d'opérations.

- a) En $+\infty$: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$. En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow 0$, donc la somme tend vers $-\infty$.
- b) $-\ln x \rightarrow +\infty$, donc $2 - \ln x \rightarrow +\infty$.
- c) $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $\frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$ (par valeurs négatives).

— **Remarque sur c)** : bien que $\ln x$ tende vers $-\infty$ « lentement », son inverse tend tout de même vers 0.

Réponse. a) $+\infty$ et $-\infty$ · b) $+\infty$ · c) 0.

Correction de l'exercice 2 - Les croissances comparées

Ce sont des formes indéterminées ($\frac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$) ; on applique les **croissances comparées** : le logarithme est **négligeable** devant les puissances de x .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

- a) Avec $n = 2$: la limite vaut 0.
- b) Avec $n = 1$: $x \ln x \rightarrow 0$.
- c) On pose $X = \sqrt{x}$; alors $\ln x = \ln(X^2) = 2 \ln X$ et

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2 \ln X}{X} \rightarrow 0$$

car $X \rightarrow +\infty$.

— **À retenir** : même devant $\sqrt{x}$, qui croît lentement, le logarithme perd.

Réponse. a) 0 · b) 0 · c) 0.

Correction de l'exercice 3 - Factoriser par le terme dominant

a) Forme $\infty - \infty$. On factorise par x , qui domine :

$$x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

Par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$; la parenthèse tend vers 1 et le produit vers $+\infty$.

b) Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par x en haut et en bas :

$$\frac{x \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right)}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{2 - \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

— **Leçon** : face à x , le terme $\ln x$ se comporte comme une constante « négligeable » ; il ne change pas la limite.

Réponse. a) $+\infty$ · b) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4 - Reconnaître un nombre dérivé

Ce sont des formes $\frac{0}{0}$; on reconnaît un **taux d'accroissement** :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

a) Avec $f = \ln$, $a = 1$, $f(1) = 0$: la limite vaut $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

b) C'est la même limite, avec $x = 1 + h$: elle vaut 1.

c) On écrit $\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \frac{\ln(1+3x)}{3x}$. Avec $h = 3x \rightarrow 0$, la fraction tend vers 1 d'après b), donc la limite vaut 3.

— **Interprétation de b)** : pour h petit, $\ln(1+h) \approx h$ — c'est l'approximation affine du logarithme en 1.

— **Contrôle** : $\frac{\ln 1,003}{0,001} \approx 2,9955 \checkmark$

Réponse. a) 1 · b) 1 · c) 3.

Correction de l'exercice 5 - Logarithmes de fonctions

On applique la **limite d'une composée** : limite de l'intérieur $u(x)$, puis limite de $\ln$ en cette valeur.

a) $u(x) = x^2 + 1 \rightarrow +\infty$ et $\ln X \rightarrow +\infty$ quand $X \rightarrow +\infty$: limite $+\infty$.

b) $u(x) = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$ et $\ln 1 = 0$: limite 0.

c) $u(x) = \frac{x+1}{x+2} \rightarrow 1$ (même degré), donc la limite vaut $\ln 1 = 0$.

d) $u(x) = x - 3 \rightarrow 0^+$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

donc la limite vaut $-\infty$: la droite $x = 0$ est asymptote verticale.

— **Méthode** : poser $X = u(x)$ rend la composition explicite et évite les confusions.

Réponse. a) $+\infty$ · b) 0 · c) 0 · d) $-\infty$.

Correction de l'exercice 6 - Le nombre e comme limite

a) Forme $\infty \times 0$. Avec $h = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0^+ :

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\ln(1+h)}{h}$$

et cette expression tend vers 1 (nombre dérivé de $\ln$ en 1).

b) On écrit la puissance sous forme exponentielle, $a^n = e^{n \ln a}$:

$$u_n = e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

— L'exposant tend vers 1 d'après a), et l'exponentielle est continue en 1 : $u_n \rightarrow e^1 = e$.

— **Intérêt historique** : c'est ainsi que Bernoulli a rencontré e, en étudiant des intérêts composés de plus en plus souvent.

— **Contrôle** : $u_{1000} = 1,001^{1000} \approx 2,7169$, et $e \approx 2,7183$ ✓

Réponse. a) 1 · b) $u_n \rightarrow e$.

Correction de l'exercice 7 - Étude complète de $\ln x$ sur x

a) **En 0^+** : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$; le produit $\ln x \times \frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ (pas d'indétermination).

En $+\infty$: par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

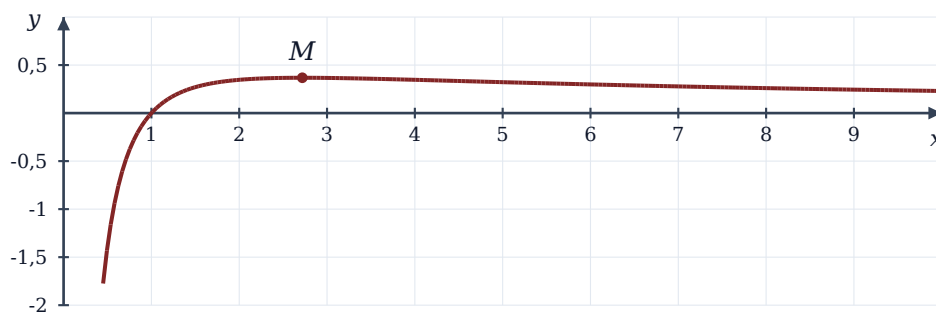
b) $f(x)$ a le signe de $1 - \ln x$, positif pour $x < e$:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$	croissante	$\frac{1}{e}$	décroissante	0

— **Asymptotes** : verticale $x = 0$; horizontale $y = 0$ en $+\infty$.

— f s'annule en $x = 1$, est négative avant, positive après.

Réponse. $-\infty$ en 0^+ , 0 en $+\infty$; maximum $\frac{1}{e}$ en $x = e$; asymptotes $x = 0$ et $y = 0$.



Courbe de f : maximum $1/e$ en $x = e$, asymptotes $x = 0$ et $y = 0$

Correction de l'exercice 8 - Limites de $x \ln x - x$

a) Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ , et $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

b) En $+\infty$: forme $\infty - \infty$. On factorise : $g(x) = x(\ln x - 1)$, produit de deux facteurs qui tendent vers $+\infty$. Donc $g(x) \rightarrow +\infty$.

c) g est décroissante sur $]0; 1]$, de 0 (limite, non atteinte) à -1 : elle y est **strictement négative**, pas de solution.

Sur $[1; +\infty[$, g est continue, strictement croissante, de -1 à $+\infty$: d'après le **corollaire du TVI**, l'équation $g(x) = 0$ a **exactement une** solution.

— Cette solution est $x = e$: $g(e) = e - e = 0$ ✓

Réponse. a) 0 · b) $+\infty$ · c) une seule solution, $x = e$.

Correction de l'exercice 9 - Nombre de solutions selon k

Pour $x > 0$, on divise par x :

$$\ln x = kx \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = k \Leftrightarrow f(x) = k$$

On lit le nombre d'antécédents de k sur le tableau de variations, grâce au **corollaire du TVI** sur chaque intervalle de monotonie.

— $k > \frac{1}{e}$: k dépasse le maximum, **aucune** solution.

— $k = \frac{1}{e}$: **une** solution, $x = e$.

— $0 < k < \frac{1}{e}$: une solution dans $]1; e[$ (branche croissante) et une dans $]e; +\infty[$ (branche décroissante, qui tend vers 0 sans l'atteindre) : **deux** solutions.

— $k \leq 0$: seule la branche croissante atteint ces valeurs ; **une** solution dans $]0; 1]$.

— **Interprétation** : la droite $y = kx$ coupe la courbe de $\ln$ deux fois si sa pente est faible, la touche si $k = \frac{1}{e}$ (tangente issue de l'origine), et passe au-dessus si k est plus grand.

Réponse. 0 solution si $k > \frac{1}{e}$; 1 si $k = \frac{1}{e}$ ou $k \leq 0$; 2 si $0 < k < \frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 10 - Une asymptote oblique

a) On étudie l'écart entre la courbe et la droite :

$$f(x) - (x + 1) = \frac{\ln x}{x}$$

Par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$: l'écart tend vers 0, donc Δ est **asymptote oblique** à la courbe en $+\infty$.

b) La position est donnée par le **signe** de l'écart $\frac{\ln x}{x}$, qui est celui de $\ln x$ ($x > 0$) :

— sur $]0; 1[$, $\ln x < 0$: la courbe est **sous** Δ ;

— en $x = 1$: la courbe **coupe** Δ , au point $(1; 2)$;

— sur $]1; +\infty[$: la courbe est **au-dessus** de Δ .

— **Méthode générale** : pour prouver qu'une droite $y = ax + b$ est asymptote, on montre que $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$; pour la position, on étudie le signe de cette différence.

Réponse. $f(x) - (x + 1) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$; courbe sous Δ sur $]0; 1[$, au-dessus sur $]1; +\infty[$.

Correction de l'exercice 11 - Deux suites avec le logarithme

a) Par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc $u_n \rightarrow 0$.

b) L'exposant $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 ; par continuité de l'exponentielle en 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = e^0 = 1$$

c) On factorise sous le logarithme : $\ln(n^2 + 1) = \ln\left[n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right] = 2 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

Donc

$$- w_n = 2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\ln n};$$

— le numérateur tend vers $\ln 1 = 0$ et le dénominateur vers $+\infty$: $w_n \rightarrow 2$.

— **Contrôle de b)** : $100^{1/100} \approx 1,047$ et $10\,000^{1/10\,000} \approx 1,0009$ ✓

Réponse. a) 0 · b) 1 · c) 2.

Correction de l'exercice 12 - Comparer deux algorithmes

a) On simplifie par n :

$$\frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$$

par croissances comparées. L'algorithme B devient **infiniment plus rapide** que A pour de grandes quantités de données.

b) Pour $n = 10^6$:

— algorithme A : $n^2 = 10^{12}$ opérations ;

— algorithme B : $n \ln n = 10^6 \times 6 \ln 10 \approx 10^6 \times 13,8 = 1,38 \times 10^7$ opérations.

Le rapport est d'environ $\frac{10^{12}}{1,38 \times 10^7} \approx 72\,000$: si B met une seconde, A met une vingtaine d'heures.

— **À retenir** : un facteur $\ln n$ est presque constant à l'échelle humaine ($\ln 10^6 \approx 14$), alors qu'un facteur n est énorme.

Réponse. a) $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ · b) B est environ 72 000 fois plus rapide.

Correction de l'exercice 13 - Logarithme d'une exponentielle

a) En $-\infty$: $e^x + 1 \rightarrow 1$, donc $f(x) \rightarrow \ln 1 = 0$. L'axe des abscisses est asymptote en $-\infty$.

b) On factorise par e^x sous le logarithme :

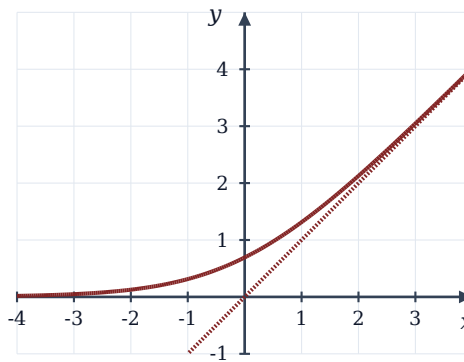
$$\ln(e^x + 1) = \ln[e^x(1 + e^{-x})] = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

— En $+\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) \rightarrow \ln 1 = 0$.

— La droite $y = x$ est **asymptote oblique** en $+\infty$.

c) $1 + e^{-x} > 1$, donc $\ln(1 + e^{-x}) > 0$: la courbe est **toujours au-dessus** de la droite $y = x$.

Réponse. a) 0 · b) asymptote $y = x$ en $+\infty$ · c) courbe au-dessus.



Courbe de f et asymptote $y = x$ (pointillé)

Correction de l'exercice 14 - Puissance fois logarithme

a) Forme $0 \times \infty$: par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

avec $n = 2$: la limite vaut 0.

b) On fait apparaître une croissance comparée connue :

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2$$

Or $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (on pose $X = \sqrt{x}$: $\frac{2 \ln X}{X} \rightarrow 0$). Le carré tend aussi vers 0.

c) Pas d'indétermination : $x \rightarrow 0$ et $-\ln x \rightarrow +\infty$, donc la somme tend vers $+\infty$.

— **Moralité** : même élevé au carré, le logarithme reste négligeable devant x .

Réponse. a) 0 · b) 0 · c) $+\infty$.

Correction de l'exercice 15 - La croissance d'un arbre

a) $\ln(1+t) \rightarrow +\infty$, donc $h(t) \rightarrow +\infty$: dans ce modèle, l'arbre grandit **sans limite**.

$$h'(t) = \frac{3}{1+t} \rightarrow 0$$

La **vitesse de croissance** tend vers 0 : l'arbre grandit de plus en plus lentement. (Le modèle cesse d'être réaliste pour de très grandes durées.)

b) On résout $h(t) > 10$:

— $3 \ln(1+t) > 8 \Leftrightarrow \ln(1+t) > \frac{8}{3} \Leftrightarrow 1+t > e^{8/3}$ (croissance de l'exponentielle) ;

— $t > e^{8/3} - 1 \approx 14,39 - 1 = 13,39$.

L'arbre dépasse 10 m au cours de sa **14^e année**.

— **Contrôle** : $h(14) = 2 + 3 \ln 15 \approx 10,12$ et $h(13) = 2 + 3 \ln 14 \approx 9,92$ ✓

Réponse. a) $h \rightarrow +\infty$ mais $h' \rightarrow 0$ · b) après 13,4 ans environ, soit la 14^e année.