

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : seuils, modèles et études de fonctions

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés algébriques (pour $a, b > 0$) :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

— $\ln 1 = 0, \ln e = 1$; $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

— **Bijection** : $\ln$ est **strictement croissante** de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \quad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

— **Lien avec l'exponentielle** : $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$).

Dérivées.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Limites.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Inégalité de référence : $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, avec **égalité seulement en 1** (la courbe est sous sa tangente en 1, $\ln$ étant **concave**).

Résolution de seuils. $q^n > A$ avec $q > 1$ équivaut à $n > \frac{\ln A}{\ln q}$.

⚠ **Deux pièges permanents** :

- toujours déterminer le **domaine** ($\ln u$ exige $u > 0$) **avant** de résoudre ;
- diviser par $\ln q$ avec $q < 1$ **renverse** l'inégalité ($\ln q < 0$).

Correction de l'exercice 1 - Simplification d'expressions

a) $8 = 2^3$, donc $\ln 8 = 3 \ln 2$ et

$$A = 3 \ln 2 - 3 \ln 2 = 0$$

b) $\ln(e^3) = 3$ et $\ln \frac{1}{e} = -1$, donc $B = 3 - 1 = 2$.

c) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$, donc

$$C = \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 5 = \ln 3 \approx 1,0986$$

- **Contrôles numériques** : $\ln 8 = 2,0794$ et $3 \ln 2 = 2,0794$ ✓ ; $\ln \sqrt{45} = 1,9033$ et $1,0986 + 0,8047 = 1,9033$ ✓
- **Réflexe** : décomposer les nombres en **facteurs premiers** avant d'appliquer les propriétés.

Réponse. a) 0 · b) 2 · c) $\ln 3$.

Correction de l'exercice 2 - Équation logarithmique

- **Domaine** : il faut $x + 3 > 0$ **et** $x - 1 > 0$, donc $x > 1$.
- **Regroupement** : $\ln[(x + 3)(x - 1)] = \ln 5$.
- $\ln$ étant **injective** : $(x + 3)(x - 1) = 5$, soit $x^2 + 2x - 3 = 5$, donc $x^2 + 2x - 8 = 0$.
- **Racines** : $\Delta = 4 + 32 = 36$, donc $x = \frac{-2 \pm 6}{2}$, soit $x = 2$ ou $x = -4$.
- **Filtrage par le domaine** : $-4 \leq 1$ est **rejetée** ; seule $x = 2$ convient.
- **Vérification** : $\ln 5 + \ln 1 = \ln 5$ ✓
- **Erreur classique** : oublier le domaine et conserver $-4 - \ln(-1)$ n'existe pas. Le domaine se détermine **avant** tout calcul.

Réponse. $x = 2$.

Correction de l'exercice 3 - Inéquation logarithmique

- **Domaine** : $2x - 1 > 0$ et $x + 4 > 0$, donc $x > \frac{1}{2}$.
- $\ln$ étant **strictement croissante**, l'inégalité se transmet aux arguments :

$$2x - 1 \leq x + 4 \iff x \leq 5$$
- **Intersection avec le domaine** :

$$S = \left] \frac{1}{2}; 5 \right]$$
- **Vérifications** : $x = 1$ donne $\ln 1 = 0 \leq \ln 5 = 1,609$ ✓ ; $x = 6$ donne $\ln 11 = 2,398 > \ln 10 = 2,303$ — bien exclu ✓
- **Contrôle de la borne** : $x = 5$ donne $\ln 9 = \ln 9$ — égalité, donc la borne est **incluse** ✓
- **Point clé** : la croissance de $\ln$ **conserve** le sens de l'inégalité — contrairement au cas d'une multiplication par un nombre négatif.

Réponse. $S = \left] \frac{1}{2}; 5 \right]$.

Correction de l'exercice 4 - Seuil avec logarithme

- On applique $\ln$ (strictement croissante) :

$$n \ln 0,9 < \ln 0,001$$
- **Attention** : $\ln 0,9 \approx -0,10536 < 0$ — diviser **renverse** l'inégalité :

$$n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,9} = \frac{-6,9078}{-0,10536} \approx 65,56$$
- **Réponse** : $n = 66$.
- **Contrôles** : $0,9^{65} = 1,0611 \times 10^{-3} > 0,001$ ✓ ; $0,9^{66} = 9,550 \times 10^{-4} < 0,001$ ✓
- **Le piège du signe** est **l'erreur la plus fréquente** de tout le chapitre : avec $q < 1$, on a $\ln q < 0$ et le sens s'inverse.
- **Contrôle de bon sens** : $0,9^n$ **décroît** vers 0, donc l'ensemble des solutions est de la forme $n \geq n_0$ — cohérent avec $n > 65,56$ ✓

Réponse. $n = 66$.

Correction de l'exercice 5 - Dérivée avec logarithme

- a) Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

b) **Produit** : $g'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

c) **Quotient** :

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

— **Contrôles de signe** : f a le signe de x ✓ (minimum en 0) ; g' s'annule pour $\ln x = -1$, soit $x = e^{-1} \approx 0,368$, où g atteint son **minimum** $-e^{-1} \approx -0,368$ ✓ ; h' s'annule pour $x = e$, où h atteint son **maximum** $\frac{1}{e} \approx 0,368$ ✓

— **Remarque** : le maximum de $\frac{\ln x}{x}$ en $x = e$ sert à comparer a^b et b^a — c'est un classique des problèmes de synthèse.

Réponse. a) $\frac{2x}{x^2 + 1}$ · b) $\ln x + 1$ · c) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Correction de l'exercice 6 - Étude de $x \ln x$

— **Dérivée** : $f'(x) = (\ln x + 1) - 1 = \ln x$.

— **Signe** : $f' < 0$ sur $]0; 1[$ et $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$.

— **Variations** : f **décroît** sur $]0; 1]$, **croît** sur $[1; +\infty[$.

— **Minimum** en $x = 1$: $f(1) = 0 - 1 = -1$.

— **Limites** :

— en 0^+ : $x \ln x \rightarrow 0$ (croissances comparées) et $-x \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow 0^-$;

— en $+\infty$: $f(x) = x(\ln x - 1) \rightarrow +\infty$.

— **Contrôles** : $f(0,5) = -0,3466 - 0,5 = -0,847$ ✓ ; $f(e) = e - e = 0$ ✓ ;
 $f(0,1) = -0,2303 - 0,1 = -0,330$ ✓

— **Zéros** : $f(x) = 0$ pour $x(\ln x - 1) = 0$, soit $x = e$ (et la limite 0 en 0^+ , non atteinte).

— **Remarque** : f est une **primitive** de $\ln$ — c'est ainsi qu'on l'obtient par intégration par parties.

Réponse. Minimum -1 en $x = 1$; $f \rightarrow 0^-$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 7 - Croissances comparées

— **Première limite** : toute puissance positive domine le logarithme,

$$\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \rightarrow 0 \times 0 = 0$$

— **Deuxième** : forme $\infty - \infty$. On **factorise par** x :

$$x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \rightarrow +\infty \times 1 = +\infty$$

— **Troisième** : forme $0 \times (-\infty)$. On pose $x = t^2$ avec $t \rightarrow 0^+$:

$$\sqrt{x} \ln x = t \times 2 \ln t = 2t \ln t \rightarrow 0$$

— **Contrôles** : $\frac{\ln 100}{10^4} = 4,6 \times 10^{-4}$ ✓ ; $100 - \ln 100 = 95,39$ ✓ ;

$$\sqrt{0,01} \ln 0,01 = 0,1 \times (-4,605) = -0,4605, \text{ puis en } 10^{-6} : 10^{-3} \times (-13,8) = -0,0138 \text{ ✓}$$

— **Hiérarchie** : $\ln x$ est **négligeable** devant toute puissance x^α ($\alpha > 0$), en $+\infty$ comme en 0^+ .

Réponse. 0, $+\infty$ et 0.

Correction de l'exercice 8 - Inégalité $\ln x \leq x-1$

- **Fonction auxiliaire** : $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
- **Dérivée** : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, **négative** sur $]0; 1[$ et **positive** sur $]1; +\infty[$.
- g atteint donc son **minimum** en $x = 1$, où $g(1) = 0$.
- **Conclusion** : $g(x) \geq 0$, soit $\ln x \leq x - 1$, avec **égalité seulement** en $x = 1$.
- **Corollaire** : en posant $x = 1 + u$ avec $u > -1$ (donc $x > 0$) :

$$\ln(1 + u) \leq u$$
- **Contrôles** : $\ln 2 = 0,693 \leq 1 \checkmark$; $\ln 0,5 = -0,693 \leq -0,5 \checkmark$; $\ln 1,1 = 0,0953 \leq 0,1 \checkmark$
- **Lien avec la convexité** : $(\ln)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, donc $\ln$ est **concave** — sa courbe est **sous** toutes ses tangentes, et $y = x - 1$ est justement la tangente en 1.
- **Usage** : c'est l'inégalité de référence pour majorer un logarithme dans les calculs de limites et de séries.

Réponse. $g(x) = x - 1 - \ln x$ a un minimum nul en 1.

Correction de l'exercice 9 - Modèle de décroissance

- **Inéquation** : $12 \times 0,85^t < 2$, soit $0,85^t < \frac{1}{6}$.
- **Logarithme**, en notant que $\ln 0,85 \approx -0,16252 < 0$ (le sens **s'inverse**) :

$$t > \frac{\ln(1/6)}{\ln 0,85} = \frac{-1,79176}{-0,16252} \approx 11,02$$
- **Réponse** : au bout d'environ **11 heures** (précisément 11,02 h, soit 11 h 1 min).
- **Contrôles** : $C(11) = 12 \times 0,85^{11} = 12 \times 0,16734 = 2,008$ mg/L — encore au-dessus $\checkmark$;
 $C(11,5) = 1,851$ mg/L $\checkmark$
- **Demi-vie** : $t_{1/2} = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,85} \approx 4,265$ h — la concentration est divisée par 2 toutes les 4 h 16 min.
- **Cohérence** : $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 1,5$ en trois demi-vies, soit 12,8 h — passer sous 2 mg/L vers 11 h est bien cohérent $\checkmark$

Réponse. Au bout d'environ 11 h (précisément 11,02 h).

Correction de l'exercice 10 - Échelle logarithmique

a) $\frac{I}{I_0} = \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10^6$, donc

$$L = 10 \log(10^6) = 10 \times 6 = 60 \text{ dB}$$

b) Si I devient $2I$, le nouveau niveau est

$$L' = 10 \log \frac{2I}{I_0} = 10 \left(\log 2 + \log \frac{I}{I_0} \right) = L + 10 \log 2$$

- Or $\log 2 \approx 0,30103$, donc l'augmentation est de $10 \log 2 \approx 3,01$ dB.
- **Résultat remarquable** : doubler l'intensité n'ajoute que **3 dB**, **indépendamment** du niveau initial.
- **Contrôle** : $60 \text{ dB} \rightarrow 63,01 \text{ dB}$ pour $I = 2 \times 10^{-6}$ $\checkmark$
- **Conséquence pratique** : il faut **dix fois** plus d'intensité pour gagner 10 dB, et 100 fois pour 20 dB — c'est tout l'intérêt de l'échelle logarithmique pour représenter des grandeurs couvrant plusieurs ordres de grandeur.

— **Lien entre les logarithmes** : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Réponse. a) 60 dB · b) $+10 \log 2 \approx 3,01$ dB.

Correction de l'exercice 11 - Équation avec changement de variable

- **Domaine** : $x > 0$.
- **Changement de variable** : on pose $X = \ln x$, qui parcourt $\mathbb{R}$ (aucune contrainte).
- L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$, de racines $X = 1$ et $X = 2$ (somme 3, produit 2).
- **Retour à x** :
- $\ln x = 1$ donne $x = e \approx 2,718$;
- $\ln x = 2$ donne $x = e^2 \approx 7,389$.
- **Vérification** pour $x = e^2$: $4 - 6 + 2 = 0$ ✓
- **Point de méthode** : contrairement au cas de e^x (toujours positif), $\ln x$ peut prendre **n'importe quelle** valeur réelle — aucune racine en X n'est à rejeter ici.
- **Ensemble solution** : $S = \{e; e^2\}$.

Réponse. $S = \{e; e^2\}$.

Correction de l'exercice 12 - Étude avec asymptote

- **Dérivée** : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.
- **Signe** : le dénominateur est positif ; f' a le signe de $x - 1$.
- **Variations** : f **décroît** sur $]0; 1]$, **croît** sur $[1; +\infty[$.
- **Minimum** en $x = 1$: $f(1) = 1 - 0 = 1$.
- **Conséquence** : $f(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x > 0$ — on retrouve $\ln x \leq x - 1$ ✓
- **Limites** :
- en 0^+ : $-\ln x \rightarrow +\infty$, donc $f \rightarrow +\infty$;
- en $+\infty$: $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \rightarrow +\infty$.
- **Asymptote verticale** : $x = 0$.
- **Comportement asymptotique** : $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ mais $f(x) - x = -\ln x \rightarrow -\infty$ — il n'y a **pas** d'asymptote oblique, seulement une **direction** asymptotique.
- **Contrôles** : $f(0,5) = 0,5 + 0,693 = 1,193$ ✓ ; $f(e) = e - 1 \approx 1,718$ ✓

Réponse. Minimum 1 en $x = 1$; $f \rightarrow +\infty$ aux deux bornes.

Correction de l'exercice 13 - Comparaison de puissances

- **Méthode** : on compare les **logarithmes**, ce qui est licite car $\ln$ est **strictement croissante**.
- $\ln(2^{300}) = 300 \ln 2$ et $\ln(3^{200}) = 200 \ln 3$.
- **Division par 100** : on compare $3 \ln 2$ et $2 \ln 3$, c'est-à-dire $\ln 8$ et $\ln 9$.
- Or $8 < 9$, donc $\ln 8 < \ln 9$, donc $300 \ln 2 < 200 \ln 3$.
- **Conclusion** : $2^{300} < 3^{200}$.
- **Contrôle numérique** : $300 \ln 2 = 207,94$ et $200 \ln 3 = 219,72$ ✓
- **Ordres de grandeur** : $2^{300} \approx 2,0 \times 10^{90}$ et $3^{200} \approx 2,7 \times 10^{95}$ — un facteur 10^5 ✓
- **Technique générale** : pour comparer a^b et c^d , on compare $b \ln a$ et $d \ln c$ — le logarithme ramène les exposants au rang de facteurs.

Réponse. $2^{300} < 3^{200}$ (car $\ln 8 < \ln 9$).

Correction de l'exercice 14 - Intérêts composés et seuil

— **Modèle** : $C_n = C_0 \times 1,04^n$.

— **Doublement** : $1,04^n \geq 2$, soit

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,04} = \frac{0,69315}{0,039221} \approx 17,67$$

— **Réponse** : **18 ans**.

— **Triplement** : $n \geq \frac{\ln 3}{\ln 1,04} = \frac{1,09861}{0,039221} \approx 28,01$, donc **29 ans**.

— **Contrôles** : $1,04^{17} = 1,948$ et $1,04^{18} = 2,026$ ✓ ; $1,04^{28} = 2,999$ et $1,04^{29} = 3,119$ ✓

— **Le cas de 28 ans est limite** : $1,04^{28} = 2,9987$, tout juste **inférieur** à 3 — d'où la nécessité de vérifier numériquement plutôt que d'arrondir 28,01 à 28.

— **Règle approximative des 70** : le temps de doublement vaut environ

$$\frac{70}{\text{taux en \%}} = \frac{70}{4} = 17,5 \text{ ans} \text{ — très proche du résultat exact } \checkmark$$

Réponse. 18 ans pour doubler, 29 ans pour tripler.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète type bac

a) **Dérivée** : $f(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$.

— **Signe** : positif sur $]0; 2[$, négatif sur $]2; +\infty[$.

— **Maximum** en $x = 2$: $f(2) = 2 \ln 2 - 2 + 3 = 2 \ln 2 + 1 \approx 2,386$.

— **Limites** : en 0^+ , $2 \ln x \rightarrow -\infty$ donc $f \rightarrow -\infty$; en $+\infty$, $f(x) = x \left(\frac{2 \ln x}{x} - 1 + \frac{3}{x} \right) \rightarrow -\infty$ (croissances comparées).

b) **Discussion par branche**.

— Sur $]0; 2[$: f croît de $-\infty$ à $2,386 > 0$ — le corollaire du TVI donne **une** racine.

— Sur $]2; +\infty[$: f décroît de $2,386$ à $-\infty$ — **une** seconde racine.

— **Conclusion** : exactement **deux** solutions.

c) **Encadrement de la plus grande** (sur la branche décroissante).

— $f(6) = 2 \times 1,7918 - 6 + 3 = 0,5836 > 0$ et $f(7) = 2 \times 1,9459 - 7 + 3 = -0,1082 < 0$, donc la racine est dans $]6; 7[$.

— $f(6,8) = 2 \times 1,9169 - 6,8 + 3 = 0,0338 > 0$ et
 $f(6,9) = 2 \times 1,9315 - 6,9 + 3 = -0,0370 < 0$.

— **Encadrement** : $6,8 < \beta < 6,9$, soit $\beta \approx 6,848$.

— **Autre racine** : $f(0,2) = -3,219 - 0,2 + 3 = -0,419 < 0$ et
 $f(0,3) = -2,408 - 0,3 + 3 = 0,292 > 0$, donc $\alpha \approx 0,253$.

Réponse. b) deux solutions · c) $6,8 < \beta < 6,9$ (soit $\beta \approx 6,848$).