Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : seuils, modèles et études de fonctions

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés algébriques (pour $a, b > 0$) :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln(a^n) = n\ln a \qquad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$$

— $\ln 1 = 0$, $\ln \mathrm{e} = 1$; $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

— **Bijection** : ln est **strictement croissante** de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \qquad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

— **Lien avec l'exponentielle** : $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ et $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$).

Dérivées.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Limites.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Inégalité de référence : $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, avec **égalité seulement en** 1 (la courbe est sous sa tangente en 1, ln étant **concave**).

Résolution de seuils. $q^n > A$ avec $q > 1$ équivaut à $n > \dfrac{\ln A}{\ln q}$.

⚠ **Deux pièges permanents** :

— toujours déterminer le **domaine** ($\ln u$ exige $u > 0$) **avant** de résoudre ;

— diviser par $\ln q$ avec $q < 1$ **renverse** l'inégalité ($\ln q < 0$).

Correction de l'exercice 1 – Simplification d'expressions

a) $8 = 2^3$, donc $\ln 8 = 3\ln 2$ et

$$A = 3\ln 2 - 3\ln 2 = 0$$

b) $\ln\left(\mathrm{e}^3\right) = 3$ et $\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}} = -1$, donc $B = 3 - 1 = 2$.

c) $\sqrt{45} = \sqrt{9\times 5} = 3\sqrt{5}$, donc

$$C = \ln 3 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 5 = \ln 3 \approx 1{,}0986$$

— **Contrôles numériques** : $\ln 8 = 2{,}0794$ et $3\ln 2 = 2{,}0794$ ✓ ; $\ln\sqrt{45} = 1{,}9033$ et $1{,}0986 + 0{,}8047 = 1{,}9033$ ✓

— **Réflexe** : décomposer les nombres en **facteurs premiers** avant d'appliquer les propriétés.

Réponse. a) 0 · b) 2 · c) $\ln 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Équation logarithmique

— **Domaine** : il faut $x+3>0$ **et** $x-1>0$, donc $x>1$.
— **Regroupement** : $\ln[(x+3)(x-1)]=\ln 5$.
— ln étant **injective** : $(x+3)(x-1)=5$, soit $x^2+2x-3=5$, donc $x^2+2x-8=0$.
— **Racines** : $\Delta=4+32=36$, donc $x=\dfrac{-2\pm 6}{2}$, soit $x=2$ ou $x=-4$.
— **Filtrage par le domaine** : $-4\leq 1$ est **rejetée** ; seule $x=2$ convient.
— **Vérification** : $\ln 5+\ln 1=\ln 5$ ✓
— **Erreur classique** : oublier le domaine et conserver -4 — $\ln(-1)$ n'existe pas. Le domaine se détermine **avant** tout calcul.

Réponse. $x=2$.

Correction de l'exercice 3 – Inéquation logarithmique

— **Domaine** : $2x-1>0$ et $x+4>0$, donc $x>\dfrac{1}{2}$.
— ln étant **strictement croissante**, l'inégalité se transmet aux arguments :

$$2x-1\leq x+4 \iff x\leq 5$$

— **Intersection avec le domaine** :

$$S=\left]\frac{1}{2};5\right]$$

— **Vérifications** : $x=1$ donne $\ln 1=0\leq \ln 5=1{,}609$ ✓ ; $x=6$ donne $\ln 11=2{,}398>\ln 10=2{,}303$ — bien exclu ✓
— **Contrôle de la borne** : $x=5$ donne $\ln 9=\ln 9$ — égalité, donc la borne est **incluse** ✓
— **Point clé** : la croissance de ln **conserve** le sens de l'inégalité — contrairement au cas d'une multiplication par un nombre négatif.

Réponse. $S=\left]\dfrac{1}{2};5\right]$.

Correction de l'exercice 4 – Seuil avec logarithme

— On applique ln (strictement croissante) :

$$n\ln 0{,}9<\ln 0{,}001$$

— **Attention** : $\ln 0{,}9\approx -0{,}10536<0$ — diviser **renverse** l'inégalité :

$$n>\frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}9}=\frac{-6{,}9078}{-0{,}10536}\approx 65{,}56$$

— **Réponse** : $n=66$.
— **Contrôles** : $0{,}9^{65}=1{,}0611\times 10^{-3}>0{,}001$ ✓ ; $0{,}9^{66}=9{,}550\times 10^{-4}<0{,}001$ ✓
— **Le piège du signe** est **l'erreur la plus fréquente** de tout le chapitre : avec $q<1$, on a $\ln q<0$ et le sens s'inverse.
— **Contrôle de bon sens** : $0{,}9^n$ **décroît** vers 0, donc l'ensemble des solutions est de la forme $n\geq n_0$ — cohérent avec $n>65{,}56$ ✓

Réponse. $n=66$.

Correction de l'exercice 5 – Dérivée avec logarithme

a) Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u=x^2+1>0$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

b) **Produit** : $g'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

c) **Quotient** :

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

— **Contrôles de signe** : f' a le signe de x ✓ (minimum en 0) ; g' s'annule pour $\ln x = -1$, soit $x = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$, où g atteint son **minimum** $-\mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}368$ ✓ ; h' s'annule pour $x = \mathrm{e}$, où h atteint son **maximum** $\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$ ✓

— **Remarque** : le maximum de $\frac{\ln x}{x}$ en $x = \mathrm{e}$ sert à comparer a^b et b^a — c'est un classique des problèmes de synthèse.

Réponse. a) $\frac{2x}{x^2+1}$ · b) $\ln x + 1$ · c) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Correction de l'exercice 6 – Étude de x ln x

— **Dérivée** : $f'(x) = (\ln x + 1) - 1 = \ln x$.
— **Signe** : $f' < 0$ sur $]0\,;1[$ et $f' > 0$ sur $]1\,;+\infty[$.
— **Variations** : f **décroît** sur $]0\,;1]$, **croît** sur $[1\,;+\infty[$.
— **Minimum** en $x = 1$: $f(1) = 0 - 1 = -1$.
— **Limites** :
— en 0^+ : $x \ln x \to 0$ (croissances comparées) et $-x \to 0$, donc $f \to 0^-$;
— en $+\infty$: $f(x) = x(\ln x - 1) \to +\infty$.
— **Contrôles** : $f(0{,}5) = -0{,}3466 - 0{,}5 \approx -0{,}847$ ✓ ; $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0$ ✓ ; $f(0{,}1) = -0{,}2303 - 0{,}1 \approx -0{,}330$ ✓
— **Zéros** : $f(x) = 0$ pour $x(\ln x - 1) = 0$, soit $x = \mathrm{e}$ (et la limite 0 en 0^+, non atteinte).
— **Remarque** : f est une **primitive** de ln — c'est ainsi qu'on l'obtient par intégration par parties.

Réponse. Minimum -1 en $x = 1$; $f \to 0^-$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 7 – Croissances comparées

— **Première limite** : toute puissance positive domine le logarithme,

$$\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \times 0 = 0$$

— **Deuxième** : forme $\infty - \infty$. On **factorise par** x :

$$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \longrightarrow +\infty \times 1 = +\infty$$

— **Troisième** : forme $0 \times (-\infty)$. On pose $x = t^2$ avec $t \to 0^+$:

$$\sqrt{x}\ln x = t \times 2\ln t = 2\,t\ln t \longrightarrow 0$$

— **Contrôles** : $\frac{\ln 100}{10^4} = 4{,}6 \times 10^{-4}$ ✓ ; $100 - \ln 100 = 95{,}39$ ✓ ; $\sqrt{0{,}01}\ln 0{,}01 = 0{,}1 \times (-4{,}605) = -0{,}4605$, puis en 10^{-6} : $10^{-3} \times (-13{,}8) = -0{,}0138$ ✓
— **Hiérarchie** : $\ln x$ est **négligeable** devant toute puissance x^α ($\alpha > 0$), en $+\infty$ comme en 0^+.

Réponse. 0, $+\infty$ et 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Inégalité ln x ≤ x−1

— **Fonction auxiliaire** : $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

— **Dérivée** : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, **négative** sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$.

— g atteint donc son **minimum** en $x = 1$, où $g(1) = 0$.

— **Conclusion** : $g(x) \geq 0$, soit $\ln x \leq x - 1$, avec **égalité seulement** en $x = 1$.

— **Corollaire** : en posant $x = 1 + u$ avec $u > -1$ (donc $x > 0$) :

$$\ln(1+u) \leq u$$

— **Contrôles** : $\ln 2 = 0{,}693 \leq 1$ ✓ ; $\ln 0{,}5 = -0{,}693 \leq -0{,}5$ ✓ ; $\ln 1{,}1 = 0{,}0953 \leq 0{,}1$ ✓

— **Lien avec la convexité** : $(\ln)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, donc ln est **concave** — sa courbe est **sous** toutes ses tangentes, et $y = x - 1$ est justement la tangente en 1.

— **Usage** : c'est l'inégalité de référence pour majorer un logarithme dans les calculs de limites et de séries.

Réponse. $g(x) = x - 1 - \ln x$ a un minimum nul en 1.

Correction de l'exercice 9 – Modèle de décroissance

— **Inéquation** : $12 \times 0{,}85^t < 2$, soit $0{,}85^t < \frac{1}{6}$.

— **Logarithme**, en notant que $\ln 0{,}85 \approx -0{,}16252 < 0$ (le sens **s'inverse**) :

$$t > \frac{\ln(1/6)}{\ln 0{,}85} = \frac{-1{,}79176}{-0{,}16252} \approx 11{,}02$$

— **Réponse** : au bout d'environ **11 heures** (précisément 11,02 h, soit 11 h 1 min).

— **Contrôles** : $C(11) = 12 \times 0{,}85^{11} \approx 12 \times 0{,}16734 \approx 2{,}008$ mg/L — encore au-dessus ✓ ; $C(11{,}5) = 1{,}851$ mg/L ✓

— **Demi-vie** : $t_{1/2} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}85} \approx 4{,}265$ h — la concentration est divisée par 2 toutes les 4 h 16 min.

— **Cohérence** : $12 \to 6 \to 3 \to 1{,}5$ en trois demi-vies, soit 12,8 h — passer sous 2 mg/L vers 11 h est bien cohérent ✓

Réponse. Au bout d'environ 11 h (précisément 11,02 h).

Correction de l'exercice 10 – Échelle logarithmique

a) $\frac{I}{I_0} = \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10^6$, donc

$$L = 10\log\left(10^6\right) = 10 \times 6 = 60 \text{ dB}$$

b) Si I devient $2I$, le nouveau niveau est

$$L' = 10\log\frac{2I}{I_0} = 10\left(\log 2 + \log\frac{I}{I_0}\right) = L + 10\log 2$$

— Or $\log 2 \approx 0{,}30103$, donc l'augmentation est de $10\log 2 \approx 3{,}01$ dB.

— **Résultat remarquable** : doubler l'intensité n'ajoute que **3 dB**, **indépendamment** du niveau initial.

— **Contrôle** : 60 dB → 63,01 dB pour $I = 2 \times 10^{-6}$ ✓

— **Conséquence pratique** : il faut **dix fois** plus d'intensité pour gagner 10 dB, et 100 fois pour 20 dB — c'est tout l'intérêt de l'échelle logarithmique pour représenter des grandeurs couvrant plusieurs ordres de grandeur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Lien entre les logarithmes** : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Réponse. a) 60 dB · b) $+10\log 2 \approx 3{,}01$ dB.

Correction de l'exercice 11 – Équation avec changement de variable

— **Domaine** : $x > 0$.
— **Changement de variable** : on pose $X = \ln x$, qui parcourt $\mathbb{R}$ (aucune contrainte).
— L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$, de racines $X = 1$ et $X = 2$ (somme 3, produit 2).
— **Retour à** x :
— $\ln x = 1$ donne $x = \mathrm{e} \approx 2{,}718$;
— $\ln x = 2$ donne $x = \mathrm{e}^2 \approx 7{,}389$.
— **Vérification** pour $x = \mathrm{e}^2$: $4 - 6 + 2 = 0$ ✓
— **Point de méthode** : contrairement au cas de e^x (toujours positif), $\ln x$ peut prendre **n'importe quelle** valeur réelle — aucune racine en X n'est à rejeter ici.
— **Ensemble solution** : $S = \left\{\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^2\right\}$.

Réponse. $S = \left\{\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^2\right\}$.

Correction de l'exercice 12 – Étude avec asymptote

— **Dérivée** : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.
— **Signe** : le dénominateur est positif ; f' a le signe de $x - 1$.
— **Variations** : f **décroît** sur $]0\,;1]$, **croît** sur $[1\,;+\infty[$.
— **Minimum** en $x = 1$: $f(1) = 1 - 0 = 1$.
— **Conséquence** : $f(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x > 0$ — on retrouve $\ln x \leq x - 1$ ✓
— **Limites** :
— en 0^+ : $-\ln x \to +\infty$, donc $f \to +\infty$;
— en $+\infty$: $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) \to +\infty$.
— **Asymptote verticale** : $x = 0$.
— **Comportement asymptotique** : $\dfrac{f(x)}{x} \to 1$ mais $f(x) - x = -\ln x \to -\infty$ — il n'y a **pas** d'asymptote oblique, seulement une **direction** asymptotique.
— **Contrôles** : $f(0{,}5) = 0{,}5 + 0{,}693 = 1{,}193$ ✓ ; $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 1 \approx 1{,}718$ ✓

Réponse. Minimum 1 en $x = 1$; $f \to +\infty$ aux deux bornes.

Correction de l'exercice 13 – Comparaison de puissances

— **Méthode** : on compare les **logarithmes**, ce qui est licite car ln est **strictement croissante**.
— $\ln\left(2^{300}\right) = 300\ln 2$ et $\ln\left(3^{200}\right) = 200\ln 3$.
— **Division par 100** : on compare $3\ln 2$ et $2\ln 3$, c'est-à-dire $\ln 8$ et $\ln 9$.
— Or $8 < 9$, donc $\ln 8 < \ln 9$, donc $300\ln 2 < 200\ln 3$.
— **Conclusion** : $2^{300} < 3^{200}$.
— **Contrôle numérique** : $300\ln 2 = 207{,}94$ et $200\ln 3 = 219{,}72$ ✓
— **Ordres de grandeur** : $2^{300} \approx 2{,}0 \times 10^{90}$ et $3^{200} \approx 2{,}7 \times 10^{95}$ — un facteur 10^5 ✓
— **Technique générale** : pour comparer a^b et c^d, on compare $b\ln a$ et $d\ln c$ — le logarithme ramène les exposants au rang de facteurs.

Réponse. $2^{300} < 3^{200}$ (car $\ln 8 < \ln 9$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Intérêts composés et seuil

— **Modèle** : $C_n = C_0 \times 1{,}04^n$.
— **Doublement** : $1{,}04^n \geq 2$, soit

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1{,}04} = \frac{0{,}69315}{0{,}039221} \approx 17{,}67$$

— **Réponse** : **18 ans**.
— **Triplement** : $n \geq \frac{\ln 3}{\ln 1{,}04} = \frac{1{,}09861}{0{,}039221} \approx 28{,}01$, donc **29 ans**.
— **Contrôles** : $1{,}04^{17} \approx 1{,}948$ et $1{,}04^{18} \approx 2{,}026$ ✓ ; $1{,}04^{28} \approx 2{,}999$ et $1{,}04^{29} \approx 3{,}119$ ✓
— **Le cas de** 28 **ans est limite** : $1{,}04^{28} \approx 2{,}9987$, tout juste **inférieur** à 3 — d'où la nécessité de vérifier numériquement plutôt que d'arrondir 28,01 à 28.
— **Règle approximative des 70** : le temps de doublement vaut environ $\frac{70}{\text{taux en \%}} = \frac{70}{4} = 17{,}5$ ans — très proche du résultat exact ✓

Réponse. 18 ans pour doubler, 29 ans pour tripler.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète type bac

a) **Dérivée** : $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$.

— **Signe** : positif sur $]0\,;2[$, négatif sur $]2\,;+\infty[$.
— **Maximum** en $x = 2$: $f(2) = 2\ln 2 - 2 + 3 = 2\ln 2 + 1 \approx 2{,}386$.
— **Limites** : en 0^+, $2\ln x \to -\infty$ donc $f \to -\infty$; en $+\infty$, $f(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} - 1 + \frac{3}{x}\right) \to -\infty$ (croissances comparées).

b) **Discussion par branche.**

— Sur $]0\,;2]$: f croît de $-\infty$ à $2{,}386 > 0$ — le corollaire du TVI donne **une** racine.
— Sur $[2\,;+\infty[$: f décroît de 2,386 à $-\infty$ — **une** seconde racine.
— **Conclusion** : exactement **deux** solutions.

c) **Encadrement de la plus grande** (sur la branche décroissante).

— $f(6) = 2 \times 1{,}7918 - 6 + 3 = 0{,}5836 > 0$ et $f(7) = 2 \times 1{,}9459 - 7 + 3 = -0{,}1082 < 0$, donc la racine est dans $]6\,;7[$.
— $f(6{,}8) = 2 \times 1{,}9169 - 6{,}8 + 3 = 0{,}0338 > 0$ et $f(6{,}9) = 2 \times 1{,}9315 - 6{,}9 + 3 = -0{,}0370 < 0$.
— **Encadrement** : $6{,}8 < \beta < 6{,}9$, soit $\beta \approx 6{,}848$.
— **Autre racine** : $f(0{,}2) = -3{,}219 - 0{,}2 + 3 = -0{,}419 < 0$ et $f(0{,}3) = -2{,}408 - 0{,}3 + 3 = 0{,}292 > 0$, donc $\alpha \approx 0{,}253$.

Réponse. b) deux solutions · c) $6{,}8 < \beta < 6{,}9$ (soit $\beta \approx 6{,}848$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).