Plaquette 1 – Définition, domaine et propriétés

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Le logarithme népérien est la **fonction réciproque** de l'exponentielle : $\ln a$ est l'exposant qu'il faut donner à e pour obtenir a. On l'utilise pour **transformer les produits en sommes** et les **puissances en produits**. Premier réflexe devant $\ln(\ldots)$: vérifier que ce qu'il y a dans la parenthèse est **strictement positif**.

Exercice 1 – Revenir à la définition

Calculer sans calculatrice :

a) $\ln 1$, $\ln \mathrm{e}$, $\ln\left(\mathrm{e}^3\right)$, $\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)$

b) $\ln \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $\ln \sqrt{\mathrm{e}}$

c) $\mathrm{e}^{\ln 5}$ et $\mathrm{e}^{-\ln 4}$

Exercice 2 – Chercher l'ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction :

a) $f(x) = \ln(x-3)$

b) $g(x) = \ln\left(4-x^2\right)$

c) $h(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

d) $k(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

Exercice 3 – Tout exprimer avec ln 2 et ln 3

Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

a) $\ln 6$ et $\ln 12$

b) $\ln \dfrac{8}{9}$

c) $\ln 72$

d) $\ln \sqrt{6}$

Exercice 4 – Simplifier des expressions

Écrire le plus simplement possible :

a) $A = \ln 50 + \ln 2 - \ln 4$

b) $B = 2\ln 3 - \ln 18 + \ln 2$

c) $C = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) \times \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right)$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Exponentielle et logarithme ensemble

Simplifier :

a) $e^{2\ln 3}$

b) $e^{-\ln 2}$

c) $\ln\left(e^{x} \times e^{2}\right)$ pour x réel

d) $e^{\ln x - \ln 2}$ pour $x > 0$

Exercice 6 – Comparer deux puissances

On donne $\ln 2 \approx 0{,}6931$ et $\ln 10 \approx 2{,}3026$.

a) Calculer $\ln\left(2^{10}\right)$ et $\ln\left(10^{3}\right)$.

b) En déduire lequel des deux nombres 2^{10} et 10^{3} est le plus grand.

Exercice 7 – Compter les chiffres d'un grand nombre

Combien de chiffres faut-il pour écrire 2^{100} en base 10 ?

On pourra encadrer 2^{100} entre deux puissances de 10 consécutives, avec $\ln 2 \approx 0{,}6931$ et $\ln 10 \approx 2{,}3026$.

Exercice 8 – Une propriété qui n'existe pas

Un élève écrit : « $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ » et « $\dfrac{\ln a}{\ln b} = \ln \dfrac{a}{b}$ ».

a) Montrer, avec $a = b = 1$, que la première égalité est fausse.

b) Montrer, avec $a = e^{2}$ et $b = e$, que la seconde est fausse.

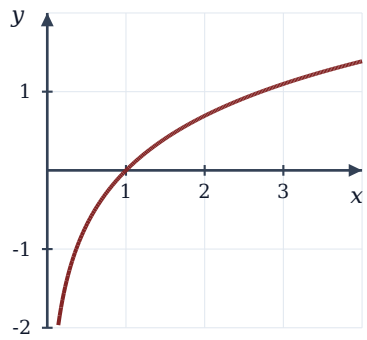
c) Quelle est la vraie formule pour $\ln a + \ln b$?

Exercice 9 – Étudier un signe

Soit $f(x) = (x-2)\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

a) Rappeler le signe de $\ln x$ selon les valeurs de x.

b) Dresser le tableau de signes de $f(x)$.



Courbe de la fonction ln

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Premières équations

Résoudre :

a) $\ln x = 2$
b) $\mathrm{e}^x = 5$
c) $\ln(2x - 1) = 0$

Exercice 11 – Comparer sans calculatrice

Comparer, sans calculatrice :

a) $\ln 3 + \ln 5$ et $\ln 14$
b) $3\ln 2$ et $2\ln 3$
c) $\ln 0{,}5$ et 0

Exercice 12 – Démontrer les propriétés

On admet la relation fondamentale $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$.

a) En l'appliquant avec $b = \dfrac{1}{a}$, démontrer que $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.
b) En déduire que $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
c) Démontrer que $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Exercice 13 – Deux conjugués

Pour $x \geq 0$, démontrer que

$$\ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = -\ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)$$

Exercice 14 – Le décibel

Le niveau sonore d'un son d'intensité I est $L = \dfrac{10}{\ln 10}\ln\dfrac{I}{I_0}$ (en décibels), où I_0 est une intensité de référence.

a) Que vaut L pour $I = I_0$? pour $I = 1\,000\,I_0$?
b) Deux instruments jouent ensemble : l'intensité **double**. De combien augmente le niveau sonore ?

Exercice 15 – Valeurs approchées par les propriétés

On donne $\ln 2 \approx 0{,}693$, $\ln 3 \approx 1{,}099$ et $\ln 5 \approx 1{,}609$.

Calculer, sans calculatrice, des valeurs approchées de $\ln 10$, $\ln 0{,}6$, $\ln 1{,}5$ et $\ln 2{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).