

Plaque 1 - Définition, domaine et propriétés

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Le logarithme népérien est la **fonction réciproque** de l'exponentielle : $\ln a$ est l'exposant qu'il faut donner à e pour obtenir a . On l'utilise pour **transformer les produits en sommes** et les **puissances en produits**. Premier réflexe devant $\ln(\dots)$: vérifier que ce qu'il y a dans la parenthèse est **strictement positif**.

Exercice 1 - Revenir à la définition

Calculer sans calculatrice :

- a) $\ln 1$, $\ln e$, $\ln(e^3)$, $\ln(e^{-2})$
- b) $\ln \frac{1}{e}$ et $\ln \sqrt{e}$
- c) $e^{\ln 5}$ et $e^{-\ln 4}$

Exercice 2 - Chercher l'ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction :

- a) $f(x) = \ln(x - 3)$
- b) $g(x) = \ln(4 - x^2)$
- c) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
- d) $k(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

Exercice 3 - Tout exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$

Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

- a) $\ln 6$ et $\ln 12$
- b) $\ln \frac{8}{9}$
- c) $\ln 72$
- d) $\ln \sqrt{6}$

Exercice 4 - Simplifier des expressions

Écrire le plus simplement possible :

- a) $A = \ln 50 + \ln 2 - \ln 4$
- b) $B = 2 \ln 3 - \ln 18 + \ln 2$
- c) $C = \ln(e^2) \times \ln(e^{-1})$

Exercice 5 - Exponentielle et logarithme ensemble

Simplifier :

- a) $e^{2\ln 3}$
- b) $e^{-\ln 2}$
- c) $\ln(e^x \times e^2)$ pour x réel
- d) $e^{\ln x - \ln 2}$ pour $x > 0$

Exercice 6 - Comparer deux puissancesOn donne $\ln 2 \approx 0,6931$ et $\ln 10 \approx 2,3026$.

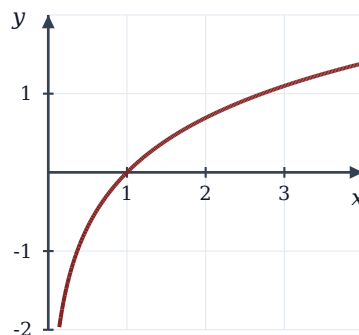
- a) Calculer $\ln(2^{10})$ et $\ln(10^3)$.
- b) En déduire lequel des deux nombres 2^{10} et 10^3 est le plus grand.

Exercice 7 - Compter les chiffres d'un grand nombreCombien de chiffres faut-il pour écrire 2^{100} en base 10 ?On pourra encadrer 2^{100} entre deux puissances de 10 consécutives, avec $\ln 2 \approx 0,6931$ et $\ln 10 \approx 2,3026$.**Exercice 8 - Une propriété qui n'existe pas**Un élève écrit : « $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$ » et « $\frac{\ln a}{\ln b} = \ln \frac{a}{b}$ ».

- a) Montrer, avec $a = b = 1$, que la première égalité est fausse.
- b) Montrer, avec $a = e^2$ et $b = e$, que la seconde est fausse.
- c) Quelle est la vraie formule pour $\ln a + \ln b$?

Exercice 9 - Étudier un signeSoit $f(x) = (x - 2) \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Rappeler le signe de $\ln x$ selon les valeurs de x .
- b) Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

*Courbe de la fonction $\ln$*

Exercice 10 - Premières équations

Résoudre :

- a) $\ln x = 2$
- b) $e^x = 5$
- c) $\ln(2x - 1) = 0$

Exercice 11 - Comparer sans calculatrice

Comparer, sans calculatrice :

- a) $\ln 3 + \ln 5$ et $\ln 14$
- b) $3 \ln 2$ et $2 \ln 3$
- c) $\ln 0,5$ et 0

Exercice 12 - Démontrer les propriétés

On admet la relation fondamentale $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$.

- a) En l'appliquant avec $b = \frac{1}{a}$, démontrer que $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.
- b) En déduire que $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- c) Démontrer que $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Exercice 13 - Deux conjugués

Pour $x \geq 0$, démontrer que

$$\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$$

Exercice 14 - Le décibel

Le niveau sonore d'un son d'intensité I est $L = \frac{10}{\ln 10} \ln \frac{I}{I_0}$ (en décibels), où I_0 est une intensité de référence.

- a) Que vaut L pour $I = I_0$? pour $I = 1\,000 I_0$?
- b) Deux instruments jouent ensemble : l'intensité **double**. De combien augmente le niveau sonore ?

Exercice 15 - Valeurs approchées par les propriétés

On donne $\ln 2 \approx 0,693$, $\ln 3 \approx 1,099$ et $\ln 5 \approx 1,609$.

Calculer, sans calculatrice, des valeurs approchées de $\ln 10$, $\ln 0,6$, $\ln 1,5$ et $\ln 2,5$.