

Plaquette 2 - Dérivée et variations du logarithme

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On dérive avec $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, puis on **réduit au même dénominateur** pour étudier le signe. Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur x est positif : le signe se lit souvent sur le seul numérateur. Les variations servent ensuite à trouver des **extremums**, à compter des **solutions** et à démontrer des **inégalités**.

Exercice 1 - Un premier maximum

Soit $f(x) = 3 \ln x - x$ sur $]0; +\infty[$.

- Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous forme d'un seul quotient.
- Étudier les variations de f et donner son maximum.

Exercice 2 - $x \ln x$

Soit $f(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- Calculer $f'(x)$.
- Résoudre $f'(x) = 0$, puis étudier les variations de f et donner son minimum.

Exercice 3 - $\ln x$ sur x

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- Montrer que $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
- En déduire les variations de f et son maximum.

Exercice 4 - Dériver $\ln u$

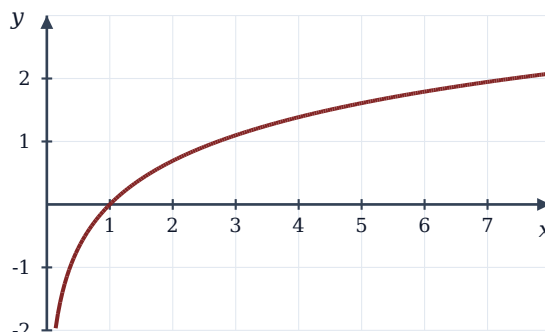
Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué :

- $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$
- $g(x) = \ln(2x - 3)$ sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$
- $h(x) = \ln(e^x + 1)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 - Deux tangentes remarquables

On a tracé la courbe de $\ln$.

- Déterminer l'équation de la tangente T_1 au point d'abscisse 1.
- Déterminer l'équation de la tangente T_2 au point d'abscisse e . Quelle particularité a-t-elle ?
- Tracer T_1 et T_2 .



Courbe de $\ln$

Exercice 6 - Démontrer $\ln x \leq x - 1$

Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- Étudier les variations de g .
- En déduire que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$. Interpréter graphiquement.

Exercice 7 - Un minimum en 1

Soit $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- Montrer que $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$.
- Dresser le tableau de variations de f (sans les limites) et en déduire que $f(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$.

Exercice 8 - Logarithme d'un trinôme

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$.

- Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
- Quel est le minimum de f ?

Exercice 9 - Une équation à solution unique

Soit $h(x) = \ln x - \frac{x}{e}$ sur $]0; +\infty[$.

- Étudier les variations de h et calculer son maximum.
- En déduire que l'équation $\ln x = \frac{x}{e}$ a une unique solution, que l'on précisera.

Exercice 10 - La concavité du logarithme

- a) Calculer la dérivée seconde de $\ln$ et en déduire sa convexité.
- b) Soit a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}$.
- c) En déduire que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Exercice 11 - Le carré du logarithme

Soit $f(x) = (\ln x)^2$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Calculer $f'(x)$.
- b) Étudier les variations de f et préciser son minimum.

Exercice 12 - Bénéfice d'une entreprise

Le bénéfice (en milliers d'euros) d'une entreprise qui produit x tonnes, pour $x \in [0; 20]$, est $B(x) = 10 \ln(x+1) - x$.

- a) Calculer $B'(x)$.
- b) Quelle production maximise le bénéfice ? Quel est ce bénéfice maximal ?

Exercice 13 - Logarithme d'un quotient

Soit $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ sur $]1; +\infty[$.

- a) Justifier que $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ sur cet intervalle.
- b) En déduire $f'(x)$ sous forme d'un seul quotient, puis le sens de variation de f .

Exercice 14 - Une fonction dont la dérivée est $\ln$

Soit $g(x) = x \ln x - x$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Calculer $g'(x)$.
- b) Étudier les variations de g , puis calculer $g(1)$ et $g(e)$.

Exercice 15 - Le logarithme contre la racine

Soit $h(x) = \sqrt{x} - \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Montrer que $h'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$.
- b) En déduire que $\ln x < \sqrt{x}$ pour tout $x > 0$.