

Plaquette 4 - Limites, asymptotes et applications

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Le logarithme tend vers l'infini **très lentement** : devant n'importe quelle puissance de x , il est négligeable. On lève les formes indéterminées avec les **croissances comparées**, en factorisant par le terme dominant, ou en reconnaissant un **nombre dérivé**. Les limites donnent les **asymptotes** ; combinées aux variations, elles permettent de **compter les solutions** d'une équation.

Exercice 1 - Limites sans indétermination

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \ln x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x}$

Exercice 2 - Les croissances comparées

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Exercice 3 - Factoriser par le terme dominant

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{2x - 1}$

Exercice 4 - Reconnaître un nombre dérivé

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$
- b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$

Exercice 5 - Logarithmes de fonctions

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1)$

- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)$
 d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln (x - 3)$

Exercice 6 - Le nombre e comme limite

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$. On pourra poser $h = \frac{1}{x}$.
 b) En déduire la limite de la suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

Exercice 7 - Étude complète de $\ln x$ sur x

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$, dont on sait que $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

- a) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
 b) Dresser le tableau de variations complet et préciser les asymptotes.

Exercice 8 - Limites de $x \ln x - x$

Soit $g(x) = x \ln x - x$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.
 b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 c) Sachant que g a pour minimum -1 en $x = 1$, déterminer le nombre de solutions de $g(x) = 0$.

Exercice 9 - Nombre de solutions selon k

On reprend $f(x) = \frac{\ln x}{x}$: croissante sur $]0; e]$ de $-\infty$ à $\frac{1}{e}$, décroissante sur $[e; +\infty[$ de $\frac{1}{e}$ vers 0 .

Selon les valeurs du réel k , déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln x = kx$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 10 - Une asymptote oblique

Soit $f(x) = x + 1 + \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$, et Δ la droite d'équation $y = x + 1$.

- a) Démontrer que Δ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
 b) Étudier la position de la courbe par rapport à Δ .

Exercice 11 - Deux suites avec le logarithme

Déterminer la limite de :

- a) $u_n = \frac{\ln n}{n}$ ($n \geq 1$)
 b) $v_n = n^{1/n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$
 c) $w_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{\ln n}$ ($n \geq 2$)

Exercice 12 – Comparer deux algorithmes

Pour trier n données, un algorithme A effectue environ n^2 opérations, un algorithme B environ $n \ln n$.

- Calculer le rapport $\frac{n \ln n}{n^2}$ et sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.
- Comparer les deux algorithmes pour $n = 10^6$.

Exercice 13 – Logarithme d’une exponentielle

Soit $f(x) = \ln(e^x + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- Montrer que $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$ et en déduire une asymptote en $+\infty$.
- Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 14 – Puissance fois logarithme

Déterminer :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x)$

Exercice 15 – La croissance d’un arbre

La hauteur (en m) d’un arbre t années après sa plantation est modélisée par $h(t) = 2 + 3 \ln(1 + t)$.

- Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h'(t)$. Interpréter.
- Au bout de combien d’années l’arbre dépasse-t-il 10 m ?